WISB108 Infi 2 tentamen
ma 27 jan 2020, 13:30 – 15:30

Aanwijzingen

- Motiveer alle antwoorden.
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Gebruik van elektronica of naslagwerken is niet toegestaan.
- **Notatie**: met log wordt de natuurlijke logaritme met grondtal e bedoeld.
- Totaal 28 punten.

Normering

100% Uitwerking is correct, efficiënt en getuigt van een goed begrip van de theorie. Het is helder opgeschreven met voldoende toelichting. Een onbelangrijk rekenfoutje kan misschien door de vingers gezien worden.

75% Grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort;
signaleert falende *sanity checks* maar is niet in staat de problemen op te lossen;
maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid);
geeft wel enige uitleg maar niet voldoende;
gebruikt verwerpelijke notaties.

50% Weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht;
mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.;
herkent evident foute tussenresultaten niet;
toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie.
Een combinatie van meerdere bij 75% genoemde tekortkomingen kan ook leiden tot deze normering.

25% Aardig beginnetje maar het levert niet echt wat op, of: een combinatie van meerdere bij 50% genoemde tekortkomingen.

0% Geen idee wat te doen, of: geeft alleen formules zonder uitleg en de opgave vereiste meer dan alleen simpel rekenwerk.

Opmerking: indien *ernstige* fouten gemaakt worden op het gebied van vwo-voorkennis (kettingregel vergeten, slechte beheersing gonio, . . .) kan de normering een punt lager uitvallen dan anders het geval zou zijn geweest.

De opgaven staan op de achterkant.

1. Bereken de lengte van de kromme die geparametriseerd wordt met $t \mapsto \mathrm{e}^t(\cos t, \sin t)$ tussen $t = 0$ en $t = 4$. 4 pt.

Uitwerking: Laten we de gegeven parametrisering $\boldsymbol{r}$ noemen. Differentieren naar t geeft

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^t(\cos t - \sin t, \cos t + \sin t);$$

de norm hiervan is (merk op: $\mathrm{e}^t > 0$ voor alle t):

$$\left\| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \right\| = \mathrm{e}^t \sqrt{2\cos^2 t + 2\sin^2 t} = \sqrt{2}\mathrm{e}^t.$$

De booglengte vinden we door integratie hiervan over het hele interval van de parametrisatie:

$$\int_0^4 \left\| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \right\| \mathrm{d}t = \sqrt{2} \int_0^4 \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \sqrt{2}(\mathrm{e}^4 - 1).$$

2. Definieer $z(u, v)$ door middel van $z = (x^2 - y)\log(x+y)$, $u = x+y$ en $v = x-y$. Bereken $\dfrac{\partial z}{\partial u}$. 4 pt.

Uitwerking: Dit kan op verschillende manieren uitgewerkt worden, maar in ieder geval is het handig om in te zien dat uit $u = x + y$, $v = x - y$ volgt: $x = \frac{1}{2}(u + v)$, $y = \frac{1}{2}(u - v)$.
Nu kun je differentieren met de kettingregel:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\
&= \left(2x\log(x+y) + \frac{x^2 - y}{x + y}\right) \cdot \tfrac{1}{2} + \left(-\log(x+y) + \frac{x^2 - y}{x + y}\right) \cdot \tfrac{1}{2} \\
&= (x - \tfrac{1}{2})\log(x+y) + \frac{x^2 - y}{x + y}.
\end{aligned}$$

Een andere mogelijkheid is z rechtstreeks uit te drukken in u en v:

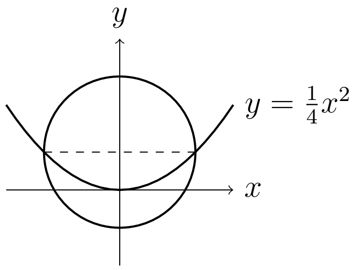
$$z = \left(\frac{(u + v)^2}{4} - \frac{u - v}{2}\right)\log u.$$

Nu kun je rechtsreeks naar u differentieren:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \tfrac{1}{2}(u + v - 1)\log u + \frac{(u + v)^2}{4u} + \frac{v}{2u} - \frac{1}{2}.$$

3. Bepaal de oppervlakte van het vlakdeel waarin $x^2+(y-1)^2 \leq 4$ en $x^2-4y \leq 0$. 4 pt.

Uitwerking: Gevraagd wordt de oppervlakte van het vlakdeel tussen de cirkel $x^2+(y-1)^2=4$ en de parabool $y=\frac{1}{4}x^2$ (zie figuur). De snijpunten van de cirkel en parabool zijn eenvoudig te vinden: dit zijn $(-2,1)$ en $(2,1)$. De rechte tussen deze twee punten verdeelt de cirkel in twee even grote delen, aangezien het middelpunt van de cirkel, $(0,1)$, op de rechte ligt. Dus we kunnen de gevraagde oppervlakte zien als een halve cirkel boven de streeplijn plus een deel van de parabool onder de streeplijn.



We kunnen dit ook "gewoon" uitrekenen als volgt. We parametriseren het gebied met x, y-coordinaten, waarbij $-2 \leq x \leq 2$ en en $\frac{1}{4}x^2 \leq y \leq 1+\sqrt{4-x^2}$. De oppervlakte is

$$\int_{-2}^{2} (-\tfrac{1}{4}x^2 + 1 + \sqrt{4-x^2})\,\mathrm{d}x.$$

Deze integraal splitsen we in twee delen, namelijk

$$\int_{-2}^{2} 1 - \tfrac{1}{4}x^2\,\mathrm{d}x = 4 - \tfrac{16}{12} = \tfrac{8}{3}$$

en

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi,$$

want deze laatste integraal herkennen we als de oppervlakte van een halve cirkel met straal 2.

Dus de oppervlakte van het gevraagde deel is $2\pi + \frac{8}{3}$.

4. $\mathcal{G}$ is het gebied waar geldt dat $x \geq y \geq 0$ en $x^2+y^2 \leq 4$. Bereken 4 pt.

$$\int_{\mathcal{G}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y).$$

Uitwerking: Het gebied $\mathcal{G}$ is een achtste cirkel met straal 2 en $0 \leq \vartheta \leq \pi/4$ in het eerste kwadrant. We substitueren poolcoordinaten $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, Jacobiaan r. Merk op dat de integrand behoorlijk vereenvoudigt:

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{r^2(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)}{r^2(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta)} = \cos(2\vartheta).$$

De uit te rekenen integraal luidt nu

$$\int_0^2 \int_0^{\pi/4} r\cos(2\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r = \int_0^2 r\,\mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}\cos u\,\mathrm{d}u = 2\cdot\tfrac{1}{2} = 1.$$

5. Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differentieerbaar, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, en $r = \|\boldsymbol{r}\|$. Bepaal de divergentie van het vectorveld $f(r)\boldsymbol{r}$. 4 pt.

Uitwerking: De divergentie van een vectorveld $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ is

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

We nemen hier $\boldsymbol{F} = f(r)\boldsymbol{r}$ waarin $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ en $r = \|\boldsymbol{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. De eerste coordinaat hiervan is $F_1 = f(r)x$. Deze differentieren we partieel naar x:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} x f(r) = f(r) + x\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial x}.$$

Merk op dat

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r},$$

zodat

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = f(r) + \frac{x^2}{r}f'(r).$$

We zien nu direct in dat

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = f(r) + \frac{y^2}{r}f'(r).$$

en

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = f(r) + \frac{z^2}{r}f'(r).$$

Dus de divergentie is

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F} = 3f(r) + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r}f'(r) = 3f(r) + rf'(r).$$

6. Bereken de oppervlakte van het oppervlak bepaald door $x^2 + y^2 + z = \frac{1}{4}$ en $z \geq 0$. 4 pt.

Uitwerking: Als we de relatie tussen de coordinaten schrijven als

$$z = \tfrac{1}{4} - (x^2 + y^2)$$

dan zien we direct dat de eis $z \geq 0$ precies overeenkomt met $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$, of in poolcoordinaten $r \leq \frac{1}{2}$. Er zijn nu verschillende strategieen mogelijk. Strategie 1: het oppervlak parametriseren door middel van

$$\Psi(r, \vartheta) = (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, \tfrac{1}{4} - r^2),$$

voor $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$ en $0 \leq \vartheta < 2\pi$. Partieel differentieren geeft

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = (\cos\vartheta, \sin\vartheta, -2r)$$

en

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta} = (-r\sin\vartheta, r\cos\vartheta, 0);$$

hiervan het uitproduct is $(2r^2\cos\vartheta, 2r^2\sin\vartheta, r)$ met norm $\sqrt{4r^4 + r^2} = r\sqrt{4r^2+1}$. Het oppervlak vinden we dan als volgt, via substitutie $u = 4r^2 + 1$:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}S &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} r\sqrt{4r^2+1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= \frac{\pi}{4}\int_1^2 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{2\sqrt{2}-1}{6}\pi.\end{aligned}$$

Strategie 2: we parametriseren met

$$(x, y) \mapsto \big(x, y, \tfrac{1}{4} - (x^2 + y^2)\big).$$

We kunnen dan namelijk gebruik maken van het oppervlakte-element in de volgende standaardvorm:

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Hierin is $\frac{\partial z}{\partial x} = -2x$ en $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$, dus

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Substitutie van poolcoordinaten en integreren over de cirkel met straal $\frac{1}{2}$ geeft nu precies dezelfde integraal als bij strategie 1.

7. a. Laat zien dat $\boldsymbol{F} = (\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^y)$ een conservatief vectorveld is. 2 pt.

Uitwerking: Kies $f(x, y) = x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x$. Er geldt $\operatorname{grad} f = \boldsymbol{F}$, dus f is een potentiaal van $\boldsymbol{F}$ en $\boldsymbol{F}$ is conservatief. (Je kunt hier ook uitrekenen dat $\operatorname{curl} \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ op het enkelvoudig samenhangende domein $\mathbb{R}^2$, en daaruit de conclusie trekken dat $\boldsymbol{F}$ conservatief is, maar dan zit je bij b nog zonder potentiaal. . . .)

b. Bepaal $\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ voor $\mathcal{C}$ het deel van de cirkel met middelpunt $(1, 1)$, straal $\sqrt{2}$, tegen de klok in tussen de punten $(0, 0)$ en $(2, 0)$. 2 pt.

Uitwerking: Omdat we de potentiaal f hebben, kunnen we de integraal makkelijk uitrekenen door de eindpunten van $\mathcal{C}$ te gebruiken:

$$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = f(2, 0) - f(0, 0) = 2\mathrm{e}^0 = 2.$$