Tentamen Lineaire algebra 1 (WISB107)
Maandag 4 november 2019 17.00-20.00

Docent: *Barbara van den Berg*
Opmerking: *Dit tentamen beslaat de stof van 3.75 EC*

- GEBRUIK EEN APART VEL VOOR IEDERE OPGAVE.
- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Het gebruik van telefoons, computers, rekenmachines, boeken of aantekeningen is niet toegestaan.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs je beweringen.
- Je kunt de opgaven in willekeurige volgorde maken. Ook als je antwoord niet volledig is, kun je er punten voor krijgen. Als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.
- Het tentamen heeft vijf opgaven. De verdeling van de punten is als volgt:
  - opgave 1: 20 punten
  - opgave 2: 20 punten
  - opgave 3: 25 punten
  - opgave 4: 15 punten
  - opgave 5: 20 punten

Opgave 1 (nieuw vel papier)

(*20 punten*) Vind alle oplossingen van de vergelijking $z^3 = 8i$ en schrijf de antwoorden in de vorm $a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$.

Solution: We proceed as follows.

- (*2 points*) The solutions can be found recalling that any complex number $z \in \mathbb{C}$ can be written as $z = r \cdot e^{i\theta}$, with $\theta \in]-\pi, \pi]$. Here we are representing z as a point in the complex plane; r is the distance of z from the origin and θ is the angle between the positive part of the x-axis and the line from the origin to z.
- (*2 points*) In particular $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, so $8i = 8 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$. Moreover, if $z = r \cdot e^{i\theta}$ then $z^3 = r^3 \cdot e^{3i\cdot\theta}$.
- (*4 points*) We get to the equation

  $$r^3 \cdot e^{3i\cdot\theta} = 8 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

  This can happen if and only if

  $$r^3 = 8$$

and

$$3i \cdot \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

This gives $r = 2$ and $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. We are interested in values of θ belonging to the interval $]-\pi, \pi]$, which are found for $k = -1$, $k = 0$ and $k = 1$. They are respectively $\theta = -\frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$ and $\theta = \frac{5}{6}\pi$.

- (*3 points*) To write our solution in the form $a + ib$, we recall that $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
- (*3 points*) In our situation, we get

$$e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i,$$

$$e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

and

$$e^{i\frac{5}{6}\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

- (*6 points, 2 for each correct solution*) To conclude, the solutions are

$$z_1 = -2i$$

$$z_2 = \sqrt{3} + i,$$

and

$$z_3 = -\sqrt{3} + i$$

Opgave 2 (nieuw vel papier)

Laat $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ twee punten zijn in $\mathbb{R}^3$.

(a). (*5 punten*) Geef een parametrisatie van de lijn l door P en Q.

Uitwerking: Een steunvector voor de lijn l is het punt P en een richtingsvector voor l is de verschilvector $Q - P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Een parametrisatie van de lijn l wordt dus gegeven door:

$$l : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

met $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b). (*5 punten*) Laat zien dat het punt R gegeven door $R = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ op l ligt.

Uitwerking: Het punt R ligt op l dan en slechts dan als er een $\lambda \in \mathbb{R}$ bestaat zodat

$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$. We zoeken dus een oplossing voor het stelsel

$$\begin{aligned} 1+\lambda &= 0 \\ 0+\lambda &= -1 \\ 1+2\lambda &= -1 \end{aligned}$$

We zien dat $\lambda = -1$ een oplossing geeft voor alle drie de vergelijkingen, dus R ligt op de lijn l.

(c). (*10 punten*) Geef een vergelijking van het vlak door R dat loodrecht staat op de lijn l.

Uitwerking Een vergelijking van een vlak wordt gegeven door $ax + by + cz = d$ waarbij de vector $(a, b, c)^t$ een normaalvector is van het vlak, en het getal d bepaald wordt door een steunpunt van het vlak. In dit geval staat het vlak loodrecht op de lijn l, dus de richtingsvector van l is een normaalvector van het vlak. De vergelijking wordt dus $x + y + 2z = d$. Als we R invullen vinden we $d = -3$, dus de vergelijking wordt gegeven door $x + y + 2z = -3$.

Opgave 3 (nieuw vel papier)

Stel $a \in \mathbb{R}$ en beschouw het volgende stelsel vergelijkingen in de onbekenden $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ x_1 + ax_2 + (a^2-1)x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(a). (*13 punten*) Bepaal voor welke waarde(n) van a het stelsel vergelijkingen geen oplossingen heeft, voor welke waarde(n) van a het stelsel oneindig veel oplossingen heeft, en voor welke waarde(n) van a het stelsel precies één oplossing heeft.
Uitwerking: We stellen een uitgebreide coëfficientenmatrix op voor het systeem en gaan vegen (eerste veegfout 2 punten aftrek, volgende veegfouten 1 punt aftrek). Indien goed uitgevoerd krijg je de volgende rijgereduceerde matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a^2-a & a \end{array}\right) \tag{1}$$

- (4 punten) Als $a^2 - a \neq 0$ dan hebben we drie pivotelementen, dus is er een unieke oplossing. Dat is precies als $a \neq 0$ en $a \neq 1$.
- (4 punten) Als $a = 0$ dan ontstaan er in de onderste rij van (1) alleen maar nullen, waardoor we x_3 vrij kunnen kiezen. Daardoor hebben we oneindig veel oplossingen voor $a = 0$.
- (4 punten) Als $a = 1$ dan ontstaat er in de onderste rij van (1) een strijdig stelsel, dus zijn er geen oplossingen.

Er is nu 1 extra punt over voor de vorm. Natuurlijk als je via een veegfout op andere antwoorden uit zo komen, dan krijg je daar zolang de redenering correct is geen extra punten aftrek voor. Verder mag je ook delen door a tijdens het vegen, mits $a \neq 0$. Dit betekent wel dat het geval $a = 0$ apart behandeld dient te worden, anders zie je wellicht 4 punten over het hoofd. Verder zijn er veel andere manieren om tot de goede conclusie te komen, zo had je ook met determinanten kunnen rekenen. Of het veegproces halverwege af kunnen breken en dan gaan redeneren. Of zelfs helemaal niet vegen of een matrix op stellen en gewoon met de vergelijkingen zelf aan de gang gaan. Voor al deze methoden geldt dezelfde verdeling van punten en komt het simpelweg aan op de onderbouwing die er gegeven wordt.

(b). (*6 punten*) Bereken de rang van de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

NB: dit is de bovenstaande coëfficiëntenmatrix voor $a = 1$.
Uitwerking:

- (6 punten) Vul $a = 1$ in aan de linkerkant van de streep bij (1) en je ziet zo twee pivots en een nulrij, dus de rang van de matrix is 2. Mensen die de hint hebben genegeerd en gewoon hebben geveegd, moeten oppassen geen veegfouten te maken. Mocht de veegfout zijn overgenomen uit de *(a.)* vraag, dan krijg je geen extra punten aftrek.

(c). (*6 punten*) Bereken de nulruimte van de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uitwerking:

- (2 punten) Het besef wat de nulruimte daadwerkelijk is en dat deze nulruimte dimensie 1 heeft. Dit hoeft niet expliciet, maar je moet in ieder geval niet zeggen dat de nulruimte een getal is, ofwel slechts een vector is, of iets anders merkwaardigs.
- (2 punten) Het besef dat $(1\ -1\ 1)^\mathsf{T}$ een element is van de nulruimte, ofwel de volledige uitwerking van de elementen van de nulruimte (ligt er aan of je iets hebt gezegd over de dimensie).
- (2 punten) Notatie van de nulruimte. Een voorbeeld van een goed opgeschreven nulruimte is
$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$
Wat ook goed is, is zeggen dat de nulruimte opgespannen wordt door de vector $(1\ -1\ 1)^\mathsf{T}$.

Is er een veegfout gemaakt in *(b.)* of *(a.)* waardoor deze opgave triviaal wordt, dan zijn er nog maximaal twee punten afgetrokken.

Opgave 4 (nieuw vel papier)

(*15 punten*) Laat $A, B \in M_{nn}$ twee $n \times n$ matrices zijn. Bewijs dat als AB inverteerbaar is, dan zijn A en B ook inverteerbaar.

Uitwerking Bewijs: Gegeven is dat AB inverteerbaar is, dus volgens een stelling uit het boek (Stelling 6.3.5) geldt $\det(AB) \neq 0$. Een tweede stelling (Stelling 6.3.4) geeft dat $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, dus we vinden dat $\det(A)\det(B) \neq 0$. Hieruit volgt dat zowel $\det(A)$ als $\det(B)$ ongelijk aan nul is, anders was het product wel gelijk aan 0, dus met stelling 6.3.5 volgt weer dat A en B inverteerbaar zijn.

Opgave 5 (nieuw vel papier)

Gegeven is de tweede orde differentiaalvergelijking

$$y'' + 2y' - 8y = \cos(2x).$$

Laat V de verzameling zijn van alle functies op $\mathbb{R}$. Het is in deze opgave gegeven dat V, met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging, een vectorruimte is. Laat

$$S_{\text{hom}} = \{y \in V | y'' + 2y' - 8y = 0\}$$

de verzameling zijn van alle oplossingen van de bijbehorende homogene differentiaalverlijking, en laat

$$S_{\text{inhom}} = \{y \in V | y'' + 2y' - 8y = \cos(2x)\}$$

de verzameling zijn van alle oplossingen van de inhomogene vergelijking.

(a). (*5 punten*) Bewijs met de definitie van lineaire deelruimte dat S_{hom} een lineaire deelruimte is van V.
Uitwerking: Dit dient direct vanuit de definitie van deelruimte bewezen te worden.

- (1 punt) Het geven van de correcte definite van deelruimte
- (1 punt) Aantonen dat $0 \in S_{\text{hom}}$.
- (2 punten) Aantonen dat als $x, y \in S_{\text{hom}}$, dan $x + y \in S_{\text{hom}}$.
- (1 punt) Aantonen dat als $\lambda \in \mathbb{R}$ en $x \in S_{\text{hom}}$, dan $\lambda x \in S_{\text{hom}}$.

Voor het geven van de correcte definitie van deelruimte (1 punt)

(b). (*5 punten*) Gegeven is dat $\dim(S_{\text{hom}}) = 2$. Geef een basis van S_{hom}. Bewijs dat de twee functies die je geeft inderdaad een basis vormen van S_{hom} (je kunt hierbij het gegeven gebruiken dat $\dim(S_{\text{hom}}) = 2$).
Uitwerking: Er kan gebruikt worden gemaakt van de strategie beschreven in bijlage C.

- (1 punt): Stel het karakteristiek polynoom dat hoort bij de vergelijking op $(r^2 - 2r - 8r)$ en vind de bijbehorende oplossingen $(r = 2, r = -4)$.
- (1 punt): Merk op dat omdat de oplossingen van het polynoom verschillend zijn de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking gegeven wordt door $Ae^{2x} + Be^{-4x}$ voor $A, B \in \mathbb{R}$.

- (1 punt): Geef expliciet een basis van de oplossingsruimte, bijvoorbeeld (e^{2x}, e^{-4x}).
- (2 punten): Bewijs expliciet dat deze twee functies linear onafhankelijk zijn: Stel, met tegenspraak, dat er een $\lambda \in \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat $\lambda e^{2x} = e^{-4x}$, dan geldt dus ook $\lambda = e^{-6x}$. Aangezien de linkerkant van de vergelijking constant is en de rechterkant niet levert dit een tegenspraak op.

(c). (*5 punten*) Stel dat y_p een gegeven oplossing is van de inhomoge vergelijking

$$y'' + 2y' - 8y = \cos(2x).$$

Bewijs dat

$$S_{\text{inhom}} = \{y + y_p | y \in S_{\text{hom}}\}.$$

Uitwerking: Er dienen twee inclusies bewezen te worden $S_{\text{inhom}} \subseteq \{y + y_p | y \in S_{\text{hom}}\}$ en $S_{\text{inhom}} \supseteq \{y + y_p | y \in S_{\text{hom}}\}$. Voor het bewijs van een van de inclusies krijg je drie van de vijf punten.
"$\supseteq$": Stel $y \in S_{\text{hom}}$ en $y_p \in S_{\text{inhom}}$, dan geldt:

$$\begin{aligned}(y + y_p)'' + 2(y + y_p)' - 8(y + y_p) &= (y + 2y' - 8y) + (y_p + 2y_p' - 8y_p)\\ &= 0 + \cos(2x),\end{aligned}$$

want $y \in S_{\text{hom}}$ en $y_p \in S_{\text{inhom}}$. We concluderen dus dat $y + y_p \in S_{\text{inhom}}$.
"$\subseteq$": Laat $z \in S_{\text{inhom}}$, en $y_p \in S_{\text{inhom}}$, dan geldt

$$\begin{aligned}(z - y_p)'' + 2(z - y_p)' - 8(z - y_p) &= (z + 2z - 8z) - (y_p'' + 2y_p' - 8y_p)\\ &= \cos(2x) - \cos(2x) = 0,\end{aligned}$$

dus $z - y_p \in S_{\text{hom}}$. Dus $z = (z - y_p) + z$, en daarom concluderen we dat $z \in \{y + y_p | y \in S_{\text{hom}}\}$.

(d). (*3 punten*) Vind een particuliere oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking door te proberen $y_p(x) = C\cos(2x) + D\sin(2x)$ met $C, D \in \mathbb{R}$.
Uitwerking: Door in te vullen en uit te werken kan de oplossing $C = -\frac{3}{40}$ en $D = \frac{1}{40}$ gevonden. Bij een klein rekenfoutje wordt een punt af getrokken, bij grote rekenfouten twee.

(e). (*2 punten*) Beschrijf alle elementen van S_{inhom} in termen van je gevonden oplossing uit onderdeel (d) en de basis uit onderdeel (b).
Uitwerking: De geven oplossing is $Ae^{2x} + Be^{-4x} - \frac{3}{40}\cos(2x) + \frac{1}{40}\sin(2x)$ voor $A, B \in \mathbb{R}$.