Tentamen Lineaire algebra 1 (WISB107)
Maandag 4 november 2019 17.00-20.00

Docent: *Barbara van den Berg*
Opmerking: *Dit tentamen beslaat de stof van 3.75 EC.*

- GEBRUIK EEN APART VEL VOOR IEDERE OPGAVE.
- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Het gebruik van telefoons, computers, rekenmachines, boeken of aantekeningen is niet toegestaan.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs je beweringen.
- Je kunt de opgaven in willekeurige volgorde maken. Ook als je antwoord niet volledig is, kun je er punten voor krijgen. Als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.
- Het tentamen heeft vijf opgaven. De verdeling van de punten is als volgt:
  - opgave 1: 20 punten
  - opgave 2: 20 punten
  - opgave 3: 25 punten
  - opgave 4: 15 punten
  - opgave 5: 20 punten

Opgave 1 (nieuw vel papier)

(*20 punten*) Vind alle oplossingen van de vergelijking $z^3 = 8i$ en schrijf de antwoorden in de vorm $a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$.

Opgave 2 (nieuw vel papier)

Laat $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ twee punten zijn in $\mathbb{R}^3$.

(a). (*5 punten*) Geef een parametrisatie van de lijn l door P en Q.

(b). (*5 punten*) Laat zien dat het punt R gegeven door $R = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ op l ligt.

(c). (*10 punten*) Geef een vergelijking van het vlak door R dat loodrecht staat op de lijn l.

Opgave 3 (nieuw vel papier)

Stel $a \in \mathbb{R}$ en beschouw het volgende stelsel vergelijkingen in de onbekenden $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ x_1 + ax_2 + (a^2 - 1)x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(a). (*13 punten*) Bepaal voor welke waarde(n) van a het stelsel vergelijkingen geen oplossingen heeft, voor welke waarde(n) van a het stelsel oneindig veel oplossingen heeft, en voor welke waarde(n) van a het stelsel precies één oplossing heeft.

(b). (*6 punten*) Bereken de rang van de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

NB: dit is de bovenstaande coëfficiëntenmatrix voor $a = 1$.

(c). (*6 punten*) Bereken de nulruimte van de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Opgave 4 (nieuw vel papier)

(*15 punten*) Laat $A, B \in M_{nn}$ twee $n \times n$ matrices zijn. Bewijs dat als AB inverteerbaar is, dan zijn A en B ook inverteerbaar.

Opgave 5 (nieuw vel papier)

Gegeven is de tweede orde differentiaalvergelijking

$$y'' + 2y' - 8y = \cos(2x).$$

Laat V de verzameling zijn van alle functies op $\mathbb{R}$. Het is in deze opgave gegeven dat V, met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging, een vectorruimte is. Laat

$$S_{\text{hom}} = \{y \in V | y'' + 2y' - 8y = 0\}$$

de verzameling zijn van alle oplossingen van de bijbehorende homogene differentiaalverlijking, en laat

$$S_{\text{inhom}} = \{y \in V | y'' + 2y' - 8y = \cos(2x)\}$$

de verzameling zijn van alle oplossingen van de inhomogene vergelijking.

(a). (*5 punten*) Bewijs met de definitie van lineaire deelruimte dat S_{hom} een lineaire deelruimte is van V.

(b). (*5 punten*) Gegeven is dat $\dim(S_{\text{hom}}) = 2$. Geef een basis van S_{hom}. Bewijs dat de twee functies die je geeft inderdaad een basis vormen van S_{hom} (je kunt hierbij het gegeven gebruiken dat $\dim(S_{\text{hom}}) = 2$).

(c). (*5 punten*) Stel dat y_p een gegeven oplossing is van de inhomoge vergelijking

$$y'' + 2y' - 8y = \cos(2x).$$

Bewijs dat

$$S_{\text{inhom}} = \{y + y_p | y \in S_{\text{hom}}\}.$$

(d). (*3 punten*) Vind een particuliere oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking door te proberen $y_p(x) = C\cos(2x) + D\sin(2x)$ met $C, D \in \mathbb{R}$.

(e). (*2 punten*) Beschrijf alle elementen van S_{inhom} in termen van je gevonden oplossing uit onderdeel (d) en de basis uit onderdeel (b).