Hertentamen Lineaire algebra 1 (WISB107)
Maandag 6 januari 2020 17.00-20.00

Docent: *Barbara van den Berg*
Opmerking: *Dit tentamen beslaat de stof van 3.75 EC.*

- GEBRUIK EEN APART VEL VOOR IEDERE OPGAVE.
- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Het gebruik van telefoons, computers, rekenmachines, boeken of aantekeningen is niet toegestaan.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs je beweringen.
- Je kunt de opgaven in willekeurige volgorde maken. Ook als je antwoord niet volledig is, kun je er punten voor krijgen. Als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.
- Het tentamen heeft vijf opgaven. De verdeling van de punten is als volgt:
  - opgave 1: 20 punten
  - opgave 2: 20 punten
  - opgave 3: 30 punten
  - opgave 4: 10 punten
  - opgave 5: 20 punten

Opgave 1 (nieuw vel papier)

(a). (*7 punten*) Schrijf het complexe getal $\frac{4+2i}{3-i}$ in de vorm $a + bi$, met $a, b \in \mathbb{R}$.

(b). (*7 punten*) Gebruik de gevonden uitdrukking in onderdeel (a) om het getal $\frac{4+2i}{3-i}$ in de vorm $re^{i\phi}$ te schrijven, waarbij r en ϕ de poolcoördinaten van $\frac{4+2i}{3-i}$ zijn.

(c). (*6 punten*) Gebruik onderdeel (*b*) om $(\frac{4+2i}{3-i})^{10}$ te berekenen. Schrijf je antwoord in de vorm $a + bi$.

Opgave 2 (nieuw vel papier)

Laat $P = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ drie punten zijn in $\mathbb{R}^3$.

(a). (*10 punten*) Geef een parametrisatie van het vlak V door P, Q en R.

(b). (*10 punten*) Geef een vergelijking van het vlak V.

Opgave 3 (nieuw vel papier)

Stel $a \in \mathbb{R}$ en beschouw de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & a+6 & -3 \\ -2 & -4 & a^2-a+2 \end{pmatrix}.$$

(a). (*10 punten*) Bepaal voor elke waarde van a de rang van deze matrix.

(b). (*5 punten*) Is de matrix inverteerbaar voor $a = 6$?

(c). (*5 punten*) Wat is de dimensie van de nulruimte van de bovenstaande matrix voor $a = 1$?

(d). (*10 punten*) Bereken de inverse van de matrix voor $a = 2$.

Opgave 4 (nieuw vel papier)

(a). (*5 punten*) Laat A een $n \times n$ matrix zijn die voldoet aan de vergelijking $A^2 - A - 2I = 0$ (waarbij 0 staat voor de $n \times n$ matrix met alleen nullen als coëfficiënten). Bewijs dat A inverteerbaar is.

(b). (*5 punten*) Geldt de identiteit:

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$$

voor alle 2×2 matrices A en B? Zo ja, bewijs de identiteit, zo nee, geef een expliciet tegenvoorbeeld.

Opgave 5 (nieuw vel papier)

Welke van de volgende deelverzamelingen zijn deelruimten van de gegeven vectorruimte over $\mathbb{R}$? Bewijs je bewering!

(a). (*7 punten*) De verzameling $\{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \,|\, \det(A) = 0\}$ van 2×2 matrices met determinant gelijk aan nul.

(b). (*7 punten*) Het vlak in $\mathbb{R}^3$ gegeven door de vergelijking $2x - y + 3z = 0$.

(c). (*6 punten*) De oplossingsverzameling in $\mathbb{R}^3$ van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$