WISB107 Infi tentamen
di 5 nov 2019, 15:00 – 17:00

Aanwijzingen

- Motiveer alle antwoorden.
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Gebruik van elektronica of naslagwerken is niet toegestaan.
- **Notatie**: met log wordt de natuurlijke logaritme met grondtal e bedoeld.
- Totaal 32 punten.

Normering

100% Uitwerking is correct, efficiënt en getuigt van een goed begrip van de theorie. Het is helder opgeschreven met voldoende toelichting. Een onbelangrijk rekenfoutje kan misschien door de vingers gezien worden.

75% Grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort;
signaleert falende *sanity checks* maar is niet in staat de problemen op te lossen;
maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid);
geeft wel enige uitleg maar niet voldoende;
gebruikt verwerpelijke notaties.

50% Weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht;
mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.;
herkent evident foute tussenresultaten niet;
toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie.
Een combinatie van meerdere bij 75% genoemde tekortkomingen kan ook leiden tot deze normering.

25% Aardig beginnetje maar het levert niet echt wat op, of: een combinatie van meerdere bij 50% genoemde tekortkomingen.

0% Geen idee wat te doen, of: geeft alleen formules zonder uitleg en de opgave vereiste meer dan alleen simpel rekenwerk.

Opmerking: indien *ernstige* fouten gemaakt worden op het gebied van vwo-voorkennis (kettingregel vergeten, slechte beheersing gonio, ...) kan de normering een punt lager uitvallen dan anders het geval zou zijn geweest.

Na het tentamen: opgaven meenemen en cursusevaluatie invullen:

De opgaven staan op de achterkant.

1. a. Laat zien dat voor reële getallen $u \geq 0$ en y geldt: 2 pt.
als $y = 1 - \dfrac{2}{u^2+1}$, dan $u = \sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$.

Uitwerking: We herschrijven $y = 1 - \frac{2}{u^2+1}$ eerst als

$$\frac{2}{u^2+1} = 1 - y.$$

Hierin is $u^2 \geq 0$, zodat $0 < \frac{2}{u^2+1} \leq 2$, en dus is $-1 \leq y < 1$. We lossen op voor u:

$$u^2 = \frac{2}{1-y} - 1 = \frac{1+y}{1-y},$$

en dus

$$u = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}.$$

Aan de grenzen van y zien we nu dat $1 + y \geq 0$ en $1 - y > 0$, zodat de breuk $\frac{1+y}{1-y}$ zeker niet negatief is en de wortel dus bestaat; bovendien is gegeven dat $u \geq 0$ dus inderdaad volstaat de wortel met een $+$-teken.

Aangezien deze opgave bedoeld is als binnenkomertje gaan we hier coulant om met het eventueel ontbreken van de tekencontroles.

b. Gegeven is dat de functie $f : \mathbb{R} \to (-1, 1), \quad x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ bijectief is. 2 pt.
Vind f^{inv}. Hint: gebruik a.

Uitwerking: Uit het gegeven volgt dat de inverse *bestaat* dus daar hoeven we ons mooi geen zorgen om te maken.
Door teller en noemer met e^x te vermenigvuldigen krijgen we

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}.$$

We passen nu de a-vraag toe met $y = f(x)$ en $u = e^x > 0$, dit levert op

$$e^x = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}},$$

dus

$$x = \log \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} = \tfrac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}.$$

We concluderen dat

$$f^{\text{inv}}(x) = \tfrac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}.$$

2. Zij $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^{2+\sin x}$. Bepaal $f'(\frac{\pi}{2})$. 4 pt.

Uitwerking: We gebruiken logaritmisch differentiëren. Er geldt

$$\log f(x) = (2+\sin x)\log x$$

en dus

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x)\left((2+\sin x)\log x\right)' \\ &= f(x)(\cos x\ \log x + \tfrac{1}{x}(2+\sin x)). \end{aligned}$$

Invullen van $x = \frac{\pi}{2}$ levert op

$$f'(\tfrac{\pi}{2}) = \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^3 (0 + \tfrac{3}{\pi/2}) = \tfrac{3}{4}\pi^2.$$

3. Bepaal $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}} \frac{\log(\log x)}{x}\,\mathrm{d}x$. 4 pt.

Uitwerking: Dit kan met substitutie $u = \log x$ en daarna partiële integratie, maar het kan ook rechtstreeks partieel met $u' = \frac{1}{x}$ en $v = \log\log x$:

$$\begin{aligned} \int \tfrac{1}{x}\log\log x\,\mathrm{d}x &= \log x\ \log\log x - \int \frac{\log x}{\log x}\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \log x\,(\log\log x - 1). \end{aligned}$$

Dit evalueren we tussen de grenzen e^{e} en e, waarbij we bedenken dat $\log \mathrm{e} = 1$ en $\log \mathrm{e}^{\mathrm{e}} = \mathrm{e}\log\mathrm{e} = \mathrm{e}$:

$$\log x(\log\log x - 1)\Big|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}} = \mathrm{e}(1-1) - 1(0-1) = 1.$$

4. Vind een primitieve van $\arcsin x$. 4 pt.

Uitwerking: Dit kan op verschillende manieren (altijd fijn op een tentamen; het verkleint de kans dat je de "verkeerde" methode gokt).

(Optie 1) We integreren eerst partieel:

$$\int 1\arcsin x\,\mathrm{d}x = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

In de nieuwe integraal substitueren we $x = \sin u$, waardoor $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{d}u$, zodat

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \sin u\,\mathrm{d}u = -\cos u = -\sqrt{1-x^2}.$$

Dus een primitieve van $\arcsin x$ is $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ (een integratieconstante is niet nodig want er wordt gevraagd om *een* primitieve).

(Optie 2) Het begin als bij optie 1, maar in de nieuwe integraal plegen we de substitutie $u = 1 - x^2$, $\mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x$, zodat:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} = -\sqrt{u} = -\sqrt{1-x^2}.$$

(Optie 3) Vanaf het begin substitueren we $x = \sin u$, $\mathrm{d}x = \cos u\,\mathrm{d}u$; daarna partieel:

$$\begin{aligned}\int u\cos u\,\mathrm{d}u &= u\sin u - \int \sin u\,\mathrm{d}u \\ &= u\sin u + \cos u \\ &= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

5. Laat zien dat $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \dfrac{1}{1+x^2}$. 2 pt.

Uitwerking: We substitueren $\frac{1+x}{1-x} = u$ en differentiëren met de kettingregel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan u = \frac{1}{1+u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

waarin

$$1 + u^2 = \frac{(1-x)^2 + (1+x)^2}{(1-x)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1-x)^2}$$

en

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{(1-x)^2}.$$

Daarmee vinden we

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan\frac{1+x}{1-x} = \frac{(1-x)^2}{2(1+x^2)}\,\frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2},$$

zoals verwacht.

6. Onderzoek de functie $f\colon x \mapsto \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ op een zo groot mogelijk domein en schets de grafiek. 8 pt.

Uitwerking: Voor het gemak zullen we in deze uitwerking net als bij de vorige opgave de notatie $u = \frac{1+x}{1-x}$ gebruiken.

- Domein: $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ want de noemer $1-x$ heeft een nulpunt in $x=1$, verder is arctan goed gedefinieerd op $\mathbb{R}$.
- Snijpunt met y-as: $f(0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ dus er is een snijpunt $(0, \frac{\pi}{4})$.
- Snijpunt met x-as: $\arctan(u) = 0$ als $u = 0$, en $u = 0$ als $x = -1$; dus we hebben het snijpunt $(-1, 0)$.
- Randen: er zijn vier randen van het domein namelijk $\pm\infty$ en de linker- en rechterzijde van 1. Voor het berekenen van de limieten gebruiken we dat

  $$u = \frac{1+x}{1-x} = -1 - \frac{2}{x-1},$$

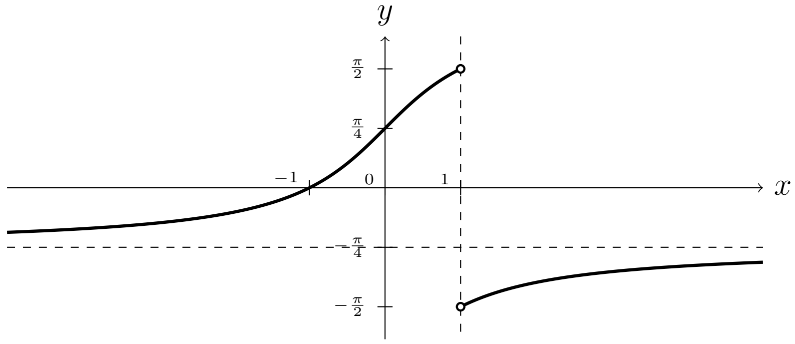
  en we geven "van boven", "van beneden" aan met superscript $+$, $-$:

  $$\begin{aligned}
  \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{u\to-1^+} \arctan u = -\tfrac{\pi}{4}^+ \\
  \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{u\to-1^-} \arctan u = -\tfrac{\pi}{4}^- \\
  \lim_{x\to1^-} f(x) &= \lim_{u\to+\infty} \arctan u = +\tfrac{\pi}{2}^- \\
  \lim_{x\to1^+} f(x) &= \lim_{u\to-\infty} \arctan u = -\tfrac{\pi}{2}^+
  \end{aligned}$$

  We zien dus een horizontale asymptoot $y = -\frac{\pi}{4}$ en een sprong bij $x = 1$.
- Afgeleide: we weten van de vorige opgave dat $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. We zien dat f' postief is op het hele domein, dus f is een stijgende functie op zijn domein (merk op: het "sprongpunt" $x = 1$ zit niet in domein, en de functie is blijkbaar links en rechts ervan stijgend).
- Tweede afgeleide: $f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$. Hierin is de noemer strikt positief, de teller wisselt van teken bij $x = 0$. Dus bij $x = 0$ zit een buigpunt: voor $x < 0$ is $f''(x) > 0$ dus de grafiek heeft de bolle kant omlaag, en voor $x > 0$ juist omhoog.
- Tekenschema (met extra waarden voor de afgeleide uitgerekend):

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\frac{\pi}{4}$	$-$	0	$+$	$\frac{\pi}{4}$	$+$	$\lightning(\pm\frac{\pi}{2})$	$-$	$-\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$		$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	1	$+$	$\lightning(\frac{1}{2})$	$+$	
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$	$\lightning$	$-$	

- Grafiek:



Noot voor fijnproevers: uit opgave 5 weten we al dat f en arctan *dezelfde afgeleide hebben; dit betekent dat f en* arctan *een constante verschillen. In dit geval zijn er twee verschillende contanten nodig, namelijk links resp. rechts van $x = -1$. Als je dat inzicht hebt en opschrijft, dan hoef je alleen nog maar twee functiewaarden uit te rekenen (een voor $x < 1$ en een voor $x > 1$) waarna de grafiek rechtstreeks uit de standaardgrafiek van $y = \arctan x$ volgt.*

7. Definieer $I_{2n} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2n}\, dx$ voor $n \in \mathbb{N}$.

a. Laat met partieel integreren zien dat $I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}$ $(n \geq 1)$. 4 pt.

Uitwerking: We schrijven $(\sin x)^{2n} = \sin x (\sin x)^{2n-1}$ en gaan partieel integreren:

$$\begin{aligned} I_{2n} &= -\cos x (\sin x)^{2n-1}\Big|_0^{\pi/2} + (2n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 x (\sin x)^{2n-2}\, dx \\ &= 0 + (2n-1)(I_{2n-2} - I_{2n}), \end{aligned}$$

waarin we gebruikt hebben dat $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Hieruit volgt dat

$$(1 + 2n - 1)I_{2n} = (2n-1)I_{2n-2},$$

en dat is equivalent aan de bewering van de opgave.

b. Bereken I_{10} en vereenvoudig je antwoord zo ver mogelijk. 2 pt.

Uitwerking: Er geldt $I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$ en dus volgt uit vraag a:

$$I_{10} = \frac{9}{10} I_8 = \frac{9}{10}\frac{7}{8} I_6 = \cdots = \frac{9{\cdot}7{\cdot}5{\cdot}3{\cdot}1{\cdot}\pi}{10{\cdot}8{\cdot}6{\cdot}4{\cdot}2{\cdot}2} = \frac{63}{512}\pi.$$

c. BONUSVRAAG (1 bonuspunt): geef I_{2n} in gesloten vorm, d.w.z. in de vorm van een directe (niet-recursieve) formule zonder ellipsis $(\ldots)$.

Uitwerking: De kunst is hier vooral om in te zien hoe je dit netjes in faculteiten onderbrengt. Het product van de even getallen krijgen we door in $n!$ elke factor met 2 te vermenigvuldigen:

$$2^n n! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n,$$

en het product van de oneven getallen krijgen we door uit $(2n)!$ de even getallen weg te delen:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Dan volgt de algemene uitdrukking uit de recursieformule van de a-vraag en de bij b berekende I_0:

$$I_{2n} = \frac{(2n)!\,\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}.$$