WISB107 Infi hertentamen
di 7 jan 2020, 17:30 – 19:30

Aanwijzingen

- Motiveer alle antwoorden.
- Werk rustig, netjes en duidelijk.
- Zorg dat je uitwerking maar één interpretatie toelaat.
- Alle informatie op dit opgavenblad mag bij alle (deel)opgaven gebruikt worden.
- Gebruik van elektronica of naslagwerken is niet toegestaan.
- **Notatie**: met log wordt de natuurlijke logaritme met grondtal e bedoeld.
- Totaal 30 punten.

Normering

100% Uitwerking is correct, efficiënt en getuigt van een goed begrip van de theorie. Het is helder opgeschreven met voldoende toelichting. Een onbelangrijk rekenfoutje kan misschien door de vingers gezien worden.

75% Grote lijn begrepen, maar technische vaardigheid schiet tekort;
signaleert falende *sanity checks* maar is niet in staat de problemen op te lossen;
maakt meerdere fouten (al dan niet door slordigheid);
geeft wel enige uitleg maar niet voldoende;
gebruikt verwerpelijke notaties.

50% Weet ongeveer wat te doen maar lijdt aan gebrek aan vaardigheid en/of inzicht;
mist belangrijke gevalsonderscheidingen of uitzonderingen etc.;
herkent evident foute tussenresultaten niet;
toont onvoldoende vaardigheid/controle/zelfreflectie.
Een combinatie van meerdere bij 75% genoemde tekortkomingen kan ook leiden tot deze normering.

25% Aardig beginnetje maar het levert niet echt wat op, of: een combinatie van meerdere bij 50% genoemde tekortkomingen.

0% Geen idee wat te doen, of: geeft alleen formules zonder uitleg en de opgave vereiste meer dan alleen simpel rekenwerk.

Opmerking: indien *ernstige* fouten gemaakt worden op het gebied van vwo-voorkennis (kettingregel vergeten, slechte beheersing gonio, ...) kan de normering een punt lager uitvallen dan anders het geval zou zijn geweest.

De opgaven staan op de achterkant.

1. Bepaal alle $x \in [0, 2\pi]$ waarvoor geldt dat $\sqrt{2 + 2\cos x} \cdot \sqrt{2 - 2\cos x} = 1$. 2 pt.

Uitwerking: Beide wortels zijn goed gedefinieerd omdat $-1 \leq \cos x \leq 1$. Kwadrateren en uitvermenigvuldigen geeft

$$4(1 - \cos^2 x) = 1.$$

Dit kunnen we naar keuze schrijven als $4\sin^2 x = 1$ of $4\cos^2 x = 3$; in het eerste geval krijgen we $\sin x = \pm\frac{1}{2}$ en in het tweede geval $\cos x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$. In beide gevallen vinden we de oplossingen $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$, $x = \frac{7\pi}{6}$, en $x = \frac{11\pi}{6}$.

2. Geef een Taylorbenadering van orde 2 (dus 3 termen) en steunpunt e van $\log(1 + \log x)$. 4 pt.

Uitwerking: De Taylorformule voor orde 2 met steunpunt a van een functie f luidt

$$T_3(x) = f(1) + f'(a)(x - a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x - a)^2.$$

We berekenen de afgeleiden van f; na vereenvoudigen krijgen we:

$$f'(x) = \frac{1}{x + x\log x},$$
$$f''(x) = -\frac{2 + \log x}{(x + x\log x)^2}.$$

We vullen het steunpunt $x = \mathrm{e}$ in en vinden: $f(\mathrm{e}) = \log 2$, $f'(\mathrm{e}) = \frac{1}{2\mathrm{e}}$, $f''(\mathrm{e}) = -\frac{3}{4\mathrm{e}^2}$. De Taylorbenadering is dus

$$T_3(x) = \log 2 + \frac{x - \mathrm{e}}{2\mathrm{e}} - \frac{3}{8\mathrm{e}^2}(x - \mathrm{e})^2.$$

3. Controleer dat $\log\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right|$ een primitieve is van $\frac{1}{\cos x}$. 4 pt.

Uitwerking: Het is voldoende om de gegeven log-uitdrukking te differentiëren, als het goed is komen we dan uit op $\frac{1}{\cos x}$. Differentiëren kan op twee manieren. In beide manieren gebruiken we dat $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\log|u| = \frac{1}{u}$, en dat $\frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1+\sin x}{\cos x}$:

1. rechtsreeks en met quotientregel:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| &= \frac{\cos x}{1+\sin x}\cdot\frac{\cos^2 x + (1+\sin x)\sin x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{1+\sin x}{\cos x(1+\sin x)} = \frac{1}{\cos x};\end{aligned}$$

2. of met behulp van log-eigenschap:

$$\log\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| = \log|1+\sin x| - \log|\cos x|,$$

zodat

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| &= \frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x}\\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x + \sin x}{\cos x(1+\sin x)}\\ &= \frac{1}{\cos x}.\end{aligned}$$

4. Bereken $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{6\mathrm{e}^{4x} + 4\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{4x}+1}\,\mathrm{d}x.$ 4 pt.

Uitwerking: We substitueren $u = \mathrm{e}^{2x}$, met daarbij $\mathrm{d}u = 2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$. Het integratieinterval verandert daardoor in $(0,1)$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{3u+2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u &= 3\int_0^1 \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u + 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\\ &= \tfrac{3}{2}\log(u^2+1)\Big|_0^1 + 2\arctan u\Big|_0^1\\ &= \tfrac{3}{2}\log 2 + \tfrac{1}{2}\pi.\end{aligned}$$

5. Los het volgende beginwaardeprobleem op: 4 pt.

$$\begin{cases} y' + x^{-2}y = \mathrm{e}^{1/x}, \\ y(2) = \mathrm{e}. \end{cases}$$

Uitwerking: De homogene vergelijking $y' + x^{-2}y = 0$ kunnen we scheiden:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -x^{-2}\,\mathrm{d}x,$$

en na integratie vinden we

$$\log y = x^{-1} + c,$$

oftewel

$$y = c\mathrm{e}^{1/x}.$$

Nu kunnen we variatie van constnte toepassen: we vatten c op als functie van x en differentieren de oplossing van de homogene vergelijking:

$$y' = (c' - cx^{-2})\mathrm{e}^{1/x}.$$

Invullen van zowel y als y' in de inhomogene vergelijking resulteert in:

$$c' = 1, \text{ en dus } c = a + x$$

voor een of andere constante a. Dus de algemene oplossing van de inhomogene vergelijking is

$$y = (a + x)\mathrm{e}^{1/x}.$$

Nu bepalen we a met behulp van de beginwaarde $y(2) = \mathrm{e}$:

$$\mathrm{e} = (a + 2)\mathrm{e}^{1/2}$$

oftewel $a = \sqrt{\mathrm{e}} - 2$. De oplossing van het beginwaardeprobleem is dus

$$y = (x + \sqrt{\mathrm{e}} - 2)\mathrm{e}^{1/x}.$$

6. Onderzoek de functie $f\colon x \mapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ op een zo groot mogelijk domein en schets de grafiek. 8 pt.

Uitwerking: Merk op $\frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{x+1} - 1$.

- Domein: eis $(1-x)/(1+x) \geq 0$, hieraan wordt voldaan als $-1 < x \leq 1$. Dus het domein is $(-1, 1]$.
- Snijpunt met y-as: $f(0) = \sqrt{1} = 1$.
- Snijpunt met x-as: $f(x) = 0$ als $x = 1$. Verder is deze wortelfunctie overal positief.
- Randen: $\lim_{x\downarrow -1} \frac{2}{1+x} = +\infty$; dan is ook $\lim_{x\downarrow -1} \frac{2}{1+x} - 1 = +\infty$ en dus $\lim_{x\downarrow -1} f(x) = +\infty$. In het andere randpunt is de functie wel gedefinieerd en hoeven we geen limiet te nemen.
- Afgeleide:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{-1}{(1+x)^2} \\ &= \frac{-1}{(1+x)^{3/2}(1-x)^{1/2}}. \end{aligned}$$

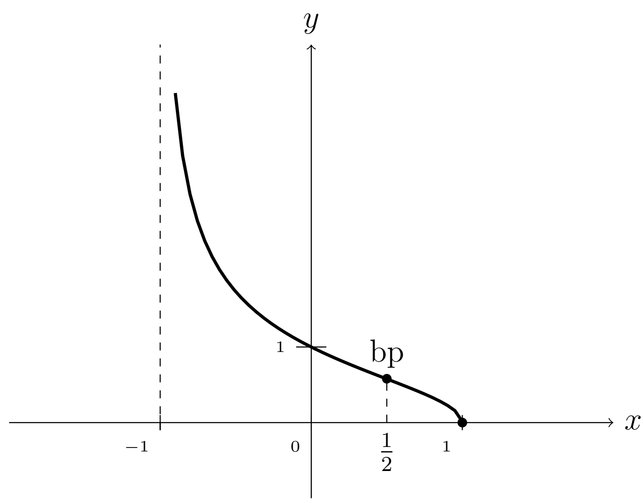
  Dit heeft duidelijk geen nulpunten; de afgeleide is zelf overal negatief dus de functie is dalend op het hele domein.
- Tweede afgeleide:

$$\begin{aligned} f''(x) &= +\tfrac{3}{2}(1+x)^{-5/2}(1-x)^{-1/2} - \tfrac{1}{2}(1+x)^{-3/2}(1-x)^{-3/2} \\ &= \frac{1-2x}{(1+x)^{5/2}(1-x)^{3/2}}. \end{aligned}$$

  De tweede afgeleide heeft dus een nulpunt in $x = \frac{1}{2}$. Daar wisselt de teller wel van teken maar de noemer niet, dus f'' wisselt van teken en f heeft een buigpunt.
- Tekenschema (met extra waarden voor de afgeleide uitgerekend):

x	-1		0		$\frac{1}{2}$		1
$f(x)$	$+\infty$	$+$	1	$+$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$+$	0
$f'(x)$		$-$	-1	$-$	$-\frac{4}{3\sqrt{3}}$	$-$	$-\infty$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	

- Grafiek:



7. Gegeven zijn een constante $a > 0$ en de functies $k(x) = \mathrm{e}^{-ax}$, $g(x) = x$, en

$$f(t) = \int_0^t k(t-s)g(s)\,\mathrm{d}s.$$

a. Bereken $f(t)$, d.w.z.: evalueer de integraal. 4 pt.

Uitwerking: Alles invullen en daarna partieel integreren levert op:

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^t s\mathrm{e}^{a(s-t)}\,\mathrm{d}s \\ &= \mathrm{e}^{-at}\int_0^t s\mathrm{e}^{as}\,\mathrm{d}s \\ &= \tfrac{1}{a}\mathrm{e}^{-at}\left(s\mathrm{e}^{as}\Big|_0^t - \int_0^t \mathrm{e}^{as}\,\mathrm{d}s \right) \\ &= \tfrac{1}{a}\mathrm{e}^{-at}\left(t\mathrm{e}^{at} - \tfrac{1}{a}(\mathrm{e}^{at}-1)\right) \\ &= \tfrac{1}{a^2}(at - 1 + \mathrm{e}^{-at}). \end{aligned}$$

b. BONUSVRAAG, 1 bonuspunt: Vind een a zodanig dat $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$.

Uitwerking: De op te lossen vergelijking luidt

$$\tfrac{1}{a^2}(a\mathrm{e} - 1 + \mathrm{e}^{-a\mathrm{e}}) = \mathrm{e}.$$

Dit ziet er vervelend uit, maar er zijn twee voordehandliggende manieren om daar wat aan te doen.

1. Stel $-1 + \mathrm{e}^{-a\mathrm{e}} = 0$, dit impliceert $a = 0$ maar dat kan geen oplossing zijn omdat we links delen door a^2.
2. Stel $a\mathrm{e} - 1 = 0$, dit impliceert $a = \mathrm{e}^{-1}$. Vervolgens blijkt dan $a^{-2}\mathrm{e}^{-a\mathrm{e}} = \mathrm{e}^2\mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}$, dus deze a voldoet.

Er was niet gevraagd om alle oplossingen dus we kunnen volstaan met $a = \frac{1}{\mathrm{e}}$.