Antwoorden tentamen Bewijzen in de Wiskunde (WISB102)
Donderdag 2 januari 2020

Docenten: *Martin Bootsma & Carel Faber & Heinz Hanßmann & Jan-Willem van Ittersum & Johan van de Leur & Guido Terra-Bleeker*

Opgave 1

In deze opgave beschouwen we de volgende twee beweringen:

$$A: \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \exists\, n \in \mathbb{N}: \quad 2^x \leq n.$$

$$B: \qquad \exists\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}: \quad 2^x \leq n.$$

(a). De ontkenning van bewering A luidt:

$$\exists\, x \in \mathbb{R}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}: \quad 2^x > n.$$

(b). De ontkenning van bewering B luidt:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \exists\, x \in \mathbb{R}: \quad 2^x > n.$$

(c). **Claim**: Bewering A is waar.

Bewijs. Zij $x \in \mathbb{R}$ gegeven. Kies dan voor n de ceiling $n = \lceil 2^x \rceil$. Dit is per definitie een geheel getal waarvoor geldt dat $n \geq 2^x > 0$. Hieruit volgt dat n positief is, dus $n \in \mathbb{N}$, en n voldoet aan de gevraagde ongelijkheid $2^x \leq n$. QED

(d). **Claim**: Bewering B is niet waar.

Bewijs. We zullen de ontkenning, zoals geformuleerd in (b), bewijzen: Zij $n \in \mathbb{N}$ gegeven. Kies dan voor x de logaritme $x = \log_2(n+1)$. Deze bestaat (dus $x \in \mathbb{R}$) omdat $n+1 > 0$, en dan is $2^x = n + 1 > n$. QED

Overigens zou je de logaritme kunnen vermijden door simpelweg $x = n$ te kiezen en op te merken dat $2^n > n$, hetgeen desgewenst eenvoudig met volledige inductie, voor alle $n \in \mathbb{N}$, bewezen kan worden.

Opgave 2

Zij $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ een rij getallen gedefinieerd door

$$a_n = \begin{cases} 17 & \text{als } n \leq 4; \\ \frac{2n+1}{n-4} & \text{als } n > 4 \end{cases}$$

Claim: Deze rij convergeert en $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 2$.

Bewijs. Zij $\varepsilon > 0$ gegeven. Kies nu $N = 4 + \lceil \frac{9}{\varepsilon} \rceil$. Dan geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n > N$ dat $n > N > 4$ en dus dat

$$|a_n - 2| = \left| \frac{2n+1}{n-4} - 2 \right| = \left| \frac{2n+1}{n-4} - \frac{2n-8}{n-4} \right| = \left| \frac{9}{n-4} \right| =$$

$$= \frac{9}{n-4} < \frac{9}{N-4} = \frac{9}{\lceil \frac{9}{\varepsilon} \rceil} \leq \frac{9}{\frac{9}{\varepsilon}} = \varepsilon,$$

omdat $\lceil \frac{9}{\varepsilon} \rceil \geq \frac{9}{\varepsilon}$. Omdat voor elke $\varepsilon > 0$ zo'n $N \in \mathbb{N}$ gekozen kan worden, concluderen we dat

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 2.$$

QED

Opgave 3

(a). **Te bewijzen**: $A \cap B \cap C = A \cup B \cup C \iff A = B = C.$

Bewijs. We gaan de dubbele implicatie achtereenvolgens beide kanten op bewijzen:

$\Leftarrow$ Neem aan dat $A = B = C$. Dan is $A \cap B \cap C = (A \cap A) \cap A = A \cap A = A$ en ook $A \cup B \cup C = (A \cup A) \cup A = A \cup A = A$, en dus $A \cap B \cap C = A = A \cup B \cup C$. Het is immers triviaal dat uit de definitie volgt dat $A \cap A = A$ en $A \cup A = A$.

$\Rightarrow$ Neem aan dat $A \cap B \cap C = A \cup B \cup C$. Voor het gemak noem ik deze verzameling $S = A \cap B \cap C = A \cup B \cup C$.

Beschouw nu allereerst een element $a \in A$. Daarvoor geldt dat $a \in A \cup (B \cup C)$, vanwege de definitie van vereniging. Voor alle $a \in A$ geldt dus dat $a \in S$. Met andere woorden: $A \subseteq S$.
Beschouw vervolgens een element $s \in S = A \cap (B \cap C)$. Volgens de definitie van doorsnede betekent dit dat $s \in A$ én $s \in B \cap C$. In het bijzonder geldt dus voor elke $s \in S$ dat $s \in A$, oftewel: $S \subseteq A$. We hebben dus bewezen dat $A = S$.

Op een zelfde manier kunnen we bewijzen dat $B = S$ en dat $C = S$. Daaruit trekken we tenslotte de conclusie dat $A = B = C$ $(= S)$.

QED

(b). **Te bewijzen**: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \iff A \subseteq C.$

Bewijs. Opnieuw gaan we de implicaties beide kanten op bewijzen:

$\Rightarrow$ Neem aan dat $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ en beschouw een willekeurig element $a \in A$. Dan geldt dat $a \in A \cup (B \cap C)$, vanwege de definitie van vereniging, en dus (volgens onze aanname) ook dat $a \in (A \cup B) \cap C$. Volgens de definitie van doorsnede betekent dit dat $a \in A \cup B$ én $a \in C$. Voor elke $a \in A$ geldt dus in het bijzonder ook dat $a \in C$. Met andere woorden: $A \subseteq C$.

$\Leftarrow$ Neem nu aan dat $A \subseteq C$. Volgens de distributieregel voor verzamelingen is

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Maar als $A \subseteq C$ dan is $A \cup C = C$ (immers: elk element van C zit per definitie ook in $A \cup C$ en elk element van $A \cup C$ zit per definitie ofwel in C, ofwel in A; maar dan dus óók in C, omdat $A \subseteq C$). We concluderen dus dat

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) = (A \cup B) \cap C.$$

QED

Opgave 4

Definitie: Een rijtje $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ wordt recursief gedefinieerd door $a_1 = 0$, $a_2 = -1$ en

$$a_n = (a_{n-1} - 1) \cdot a_{n-2}, \qquad \forall n \geq 3.$$

Te bewijzen: Voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{als } n \text{ oneven;} \\ (-1)^{n/2} & \text{als } n \text{ even.} \end{cases}$$

Bewijs. We bewijzen dit resultaat met behulp van (het sterke principe van) volledige inductie:

Ind. start: Merk allereerst op dat 1 oneven is en $a_1 = 0$, dus het resultaat klopt voor $n = 1$.

Daarnaast is $(-1)^{2/2} = (-1)^1 = -1 = a_2$, dus het resultaat klopt ook voor $n = 2$.

Ind. hypo.: Zij nu $n \geq 3$ en neem aan dat het resultaat geldt voor alle $k < n$.

Ind. stap: We onderscheiden nu twee gevallen:

- n is oneven: In dat geval is $n-2$ ook weer oneven en omdat $n-2 < n$ geldt volgens de inductiehypothese dat $a_{n-2} = 0$. Hieruit volgt dat

$$a_n = (a_{n-1} - 1) \cdot a_{n-2} = (a_{n-1} - 1) \cdot 0 = 0.$$

  Het resultaat geldt (in dit geval) dus ook voor n.

- n is even: In dat geval is $n - 1 < n$ oneven, dus $a_{n-1} = 0$, en $n - 2 < n$ is even, dus $a_{n-2} = (-1)^{\frac{n-2}{2}} = (-1)^{\frac{n}{2}-1}$. Hieruit volgt dat

$$a_n = (a_{n-1} - 1) \cdot a_{n-2} = (0 - 1) \cdot (-1)^{\frac{n}{2}-1} = (-1)^{\frac{n}{2}}.$$

  Het resultaat geldt dus (ook in dit geval) ook voor n.

We zien dat in alle gevallen uit de inductiehypothese dat het resultaat geldt voor alle $k < n$, ook volgt dat het resultaat geldt voor n. Met (het sterke principe van) volledige inductie is nu dus bewezen dat

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{als } n \text{ oneven;} \\ (-1)^{n/2} & \text{als } n \text{ even,} \end{cases}$$

voor alle $n \in \mathbb{N}$.

QED

Opgave 5

Definitie: De relatie R op $\mathbb{Z}$ is gedefinieerd door: $k\,R\,\ell$ wanneer $k^2 \equiv \ell^2 \pmod{4}$.

(a). **Te bewijzen**: R is een equivalentierelatie.

Bewijs. We gaan bewijzen dat de relatie R reflexief, symmetrisch en transitief is:

reflexiviteit: Zij $k \in \mathbb{Z}$ gegeven. Dan is $k^2 - k^2 = 0 = 4 \cdot 0$. Dus $4|k^2 - k^2$, hetgeen betekent dat $k^2 \equiv k^2 \pmod{4}$. Oftewel: $k\,R\,k$, voor alle $k \in \mathbb{Z}$.

symmetrie: Neem aan dat $k\,R\,\ell$, dus $k^2 \equiv \ell^2 \pmod{4}$. Dan is er een $r \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $k^2 - \ell^2 = 4 \cdot r$. Dat betekent dat $\ell^2 - k^2 = 4 \cdot (-r)$, waarbij $-r \in \mathbb{Z}$. Dus $4|\ell^2 - k^2$, hetgeen betekent dat $\ell^2 \equiv k^2 \pmod{4}$, en dus $\ell\,R\,k$.

transitiviteit: Neem aan dat $k\,R\,\ell$ en $\ell\,R\,m$. Met andere woorden, $k^2 \equiv \ell^2 \pmod{4}$ en $\ell^2 \equiv m^2 \pmod{4}$. Dan zijn er dus $r, s \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $k^2 - \ell^2 = 4 \cdot r$ en $\ell^2 - m^2 = 4 \cdot s$. Hieruit volgt dat

$$k^2 - m^2 = k^2 - \ell^2 + \ell^2 - m^2 = 4r + 4s = 4 \cdot (r + s),$$

waarin $r + s \in \mathbb{Z}$. Dus $4|k^2 - m^2$ en dus $k^2 \equiv m^2 \pmod{4}$. Oftewel: $k\,R\,m$.

Omdat de relatie R reflexief, symmetrisch en transitief is, kunnen we concluderen dat R een equivalentierelatie is. QED

Merk op dat dit bewijs nog korter had gekund, omdat we al weten dat modulo-rekening een equivalentierelatie is. Je had dus gewoon kunnen zeggen:

reflexiviteit: Zij $k \in \mathbb{Z}$ gegeven. Dan is $k^2 \equiv k^2 \pmod{4}$, en dus $k\,R\,k$, omdat congruentie modulo 4 reflexief is.

symmetrie: Neem aan dat $k\,R\,\ell$, dus $k^2 \equiv \ell^2 \pmod{4}$. Dan is $\ell^2 \equiv k^2 \pmod{4}$, en dus $\ell\,R\,k$, omdat congruentie modulo 4 symmetrisch is.

transitiviteit: Neem aan dat $k\,R\,\ell$ en $\ell\,R\,m$. Dan is $k^2 \equiv \ell^2 \equiv m^2 \pmod{4}$, omdat congruentie modulo 4 transitief is. Oftewel: $k\,R\,m$.

Definitie: De relatie S op $\mathbb{Z}$ is gedefinieerd door: $k\,S\,\ell$ wanneer $k + \ell \equiv 0 \pmod{2}$.

(b). **Te bewijzen**: S is een equivalentierelatie.

Bewijs. We gaan bewijzen dat de relatie S reflexief, symmetrisch en transitief is:

reflexiviteit: Zij $k \in \mathbb{Z}$ gegeven. Dan is $k + k - 0 = 2k$ deelbaar door 2, hetgeen betekent dat $k + k \equiv 0 \pmod{2}$. Oftewel: $k\,S\,k$, voor alle $k \in \mathbb{Z}$.

symmetrie: Neem aan dat $k\,S\,\ell$, dus $k + \ell \equiv 0 \pmod{2}$. Dan is ook $\ell + k - 0 = k + \ell$ deelbaar door 2, hetgeen betekent dat $\ell + k \equiv 0 \pmod{2}$, en dus dat $\ell\,S\,k$.

transitiviteit: Neem aan dat $k\,S\,\ell$ en $\ell\,S\,m$. Dat wil zeggen dat $k + \ell \equiv 0 \pmod{2}$ en $\ell + m \equiv 0 \pmod{2}$. Dan zijn $k + \ell - 0$ en $\ell + m - 0$ deelbaar door 2, dus er zijn $r, s \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $k + \ell = 2 \cdot r$ en $\ell + m = 2 \cdot s$. Hieruit volgt dat

$$k + m - 0 = k + \ell - 2\ell + \ell + m = 2r - 2\ell + 2s = 2 \cdot (r - \ell + s),$$

waarin $r - \ell + s \in \mathbb{Z}$. Dus $2|k + m - 0$, hetgeen betekent dat $k + m \equiv 0 \pmod{2}$. Oftewel: $k\,S\,m$.

Omdat de relatie S reflexief, symmetrisch en transitief is, kunnen we concluderen dat S een equivalentierelatie is. QED

(c). **Claim**: De equivalentieklassen van R en S zijn gelijk.

Bewijs. Er zijn diverse manieren om dit te bewijzen. Zo zou je kunnen bewijzen dat de twee relaties aan elkaar gelijk zijn. Dat wil zeggen, dat $k\,R\,\ell$ dan en slechts dan als $k\,S\,\ell$. In plaats daarvan gaan we hier bewijzen dat elk van beide equivalentierelaties slechts twee equivalentieklassen heeft: De verzameling van alle even getallen is de equivalentieklasse $[0]_R = [0]_S$ van het getal nul, en de verzameling van alle oneven getallen is de equivalentieklasse $[1]_R = [1]_S$ van het getal één.

Allereerst merken we op dat 0 en 1 niet equivalent zijn aan elkaar, en dus verschillende equivalentieklassen hebben, zowel onder de equivalentierelatie R als onder S. Namelijk:

- $1^2 - 0^2 = 1$ is niet deelbaar door 4, dus $1^2 \not\equiv 0^2 \pmod 4$, en dus $1 \not R\, 0$.
- $1 + 0 - 0 = 1$ is niet deelbaar door 2, dus $1 + 0 \not\equiv 0 \pmod 2$, en dus $1 \not S\, 0$.

Om aan te tonen dat

$$[0]_R = [0]_S = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ is even}\},$$

$$[1]_R = [1]_S = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ is oneven}\},$$

is het nu voldoende om te laten zien dat alle even getallen equivalent zijn met 0 (zowel onder R als onder S) en alle oneven getallen met 1. Welnu:

Neem aan dat n even is. Dan is $n = 2r$ voor een zekere $r \in \mathbb{Z}$. In dat geval is:

- $n^2 - 0^2 = 4r^2$ deelbaar door 4, dus $n^2 \equiv 0^2 \pmod 4$, en dus $n\,R\,0$.
- $n + 0 - 0 = 2r$ deelbaar door 2, dus $n + 0 \equiv 0 \pmod 2$, en dus $n\,S\,0$.

Neem nu aan dat n oneven is. Dan is $n = 2r + 1$ voor een zekere $r \in \mathbb{Z}$. In dat geval is:

- $n^2 - 1^2 = 4r^2 + 4r + 1 - 1 = 4 \cdot (r^2 + r)$ deelbaar door 4, omdat $r^2 + r \in \mathbb{Z}$. Dit betekent dat $n^2 \equiv 1^2 \pmod 4$, en dus $n\,R\,1$, waaruit volgt dat $n \in [1]_R$.
- $n + 1 - 0 = 2r + 2 = 2 \cdot (r + 1)$ deelbaar door 2, omdat $r + 1 \in \mathbb{Z}$. Dit betekent dat $n + 1 \equiv 0 \pmod 2$, en dus $n\,S\,1$, waaruit volgt dat $n \in [1]_S$.

Hiermee hebben we aangetoond dat de equivalentieklasse van nul onder zowel R als S gelijk is aan de verzameling van alle even getallen, en de equivalentieklasse van één is onder zowel R als S gelijk aan de verzameling van alle oneven getallen. De equivalentieklassen van de relaties R en S zijn dus aan elkaar gelijk. QED

Opgave 6

Gegeven: A en B zijn twee niet-lege verzamelingen met dezelfde kardinaliteit (dus $|A| = |B|$).
Te bewijzen: Voor alle $a \in A, b \in B$ geldt dat $|A - \{a\}| = |B - \{b\}|$.
Met andere woorden: als we één element uit elk van beide verzamelingen weglaten, dan hebben de resulterende verzamelingen ook weer dezelfde kardinaliteit.

(a). Allereerst nemen we aan dat $|A| = 1$ en $|B| = 1$, dus dat beide verzamelingen slechts één element bevatten, zeg $A = \{a\}$ en $B = \{b\}$. Dan hebben zowel $A - \{a\} = \emptyset$

als $B - \{b\} = \emptyset$ nul elementen, dus hebben de resulterende verzamelingen inderdaad dezelfde kardinaliteit:

$$|A - \{a\}| = 0 = |B - \{b\}|.$$

(b). Vervolgens nemen we aan dat $|A| = 2$ en $|B| = 2$, dus dat beide verzamelingen precies twee elementen bevatten, zeg $A = \{a_1, a_2\}$ en $B = \{b_1, b_2\}$. Als je één element uit zo'n verzameling weglaat dan hou je (alleen) het andere element over:

$$A - \{a_1\} = \{a_2\}, \qquad A - \{a_2\} = \{a_1\}, \qquad B - \{b_1\} = \{b_2\}, \qquad B - \{b_2\} = \{b_1\}.$$

In alle gevallen bevat de resulterende verzameling precies één element, dus hebben ze inderdaad dezelfde kardinaliteit:

$$|A - \{a\}| = 1 = |B - \{b\}|.$$

Tenslotte nemen we aan dat $|A| > 2$, dat $a_1 \neq a_2 \in A$ en dat $f \colon A \to B$ een bijectie is.

Definitie: De afbeelding $f_{a_1,a_2} \colon A \to B$ is gedefinieerd door

$$f_{a_1,a_2}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{als } x \neq a_1, x \neq a_2, \\ f(a_2) & \text{als } x = a_1, \\ f(a_1) & \text{als } x = a_2. \end{cases}$$

(c). **Lemma**: De afbeelding f_{a_1,a_2} is opnieuw een bijectie.

Bewijs. We gaan achtereenvolgens bewijzen dat de functie f_{a_1,a_2} zowel surjectief als injectief is:

surjectiviteit: Zij $b \in B$ gegeven. Omdat f surjectief is, is er dan een $a \in A$ zodanig dat $f(a) = b$. Er zijn drie gevallen te onderscheiden:

- $a = a_1$. In dat geval is $f_{a_1,a_2}(a_2) = f(a_1) = f(a) = b$.
- $a = a_2$. In dat geval is $f_{a_1,a_2}(a_1) = f(a_2) = f(a) = b$.
- $a \neq a_1$ en $a \neq a_2$. In dat geval is $f_{a_1,a_2}(a) = f(a) = b$.

In elk van de gevallen vinden we dus een $x \in A$ zodanig dat $f_{a_1,a_2}(x) = b$, dus we kunnen concluderen dat de functie f_{a_1,a_2} surjectief is.

injectiviteit: Zij $x \neq y$ twee verschillende elementen van A. Er zijn nu zeven gevallen te onderscheiden:

- Als $x = a_1$ en $y = a_2$, dan is $f_{a_1,a_2}(x) = f_{a_1,a_2}(a_1) = f(a_2)$ en $f_{a_1,a_2}(y) = f_{a_1,a_2}(a_2) = f(a_1)$. Omdat f injectief is en $a_1 \neq a_2$, geldt dat $f(a_1) \neq f(a_2)$ en dus ook $f_{a_1,a_2}(y) \neq f_{a_1,a_2}(x)$.
- Als $x = a_2$ en $y = a_1$ bewijzen we op analoge wijze dat $f_{a_1,a_2}(x) \neq f_{a_1,a_2}(y)$.
- Als $x = a_1$ en $y \neq a_2$, dan is $f_{a_1,a_2}(x) = f_{a_1,a_2}(a_1) = f(a_2)$. Maar nu is $y \neq a_1$ én $y \neq a_2$, dus dan is $f_{a_1,a_2}(y) = f(y)$. Omdat f injectief is en $a_2 \neq y$, moet gelden dat $f(a_2) \neq f(y)$ en dus ook dat $f_{a_1,a_2}(x) \neq f_{a_1,a_2}(y)$.
- Voor de gevallen dat $x = a_2$ en $y \neq a_1$, of dat $y = a_2$ en $x \neq a_1$, of dat $y = a_1$ en $x \neq a_2$, bewijzen we op analoge wijze dat ook in die gevallen geldt dat $f_{a_1,a_2}(x) \neq f_{a_1,a_2}(y)$.

- Tenslotte is het mogelijk dat $x \neq a_1, x \neq a_2, y \neq a_1$ en $y \neq a_2$. In die gevallen is $f_{a_1,a_2}(x) = f(x)$ en $f_{a_1,a_2}(y) = f(y)$. Omdat f injectief is en we nog steeds hebben aangenomen dat $x \neq y$, moet dan ook gelden dat $f(x) \neq f(y)$, en dus ook in deze gevallen geldt dat $f_{a_1,a_2}(x) \neq f_{a_1,a_2}(y)$.

We hebben nu laten zien dat in alle gevallen waarin $x \neq y$ moet gelden dat $f_{a_1,a_2}(x) \neq f_{a_1,a_2}(y)$. Dus de functie f_{a_1,a_2} is injectief.

Aangezien de functie f_{a_1,a_2} zowel surjectief als injectief is, is de functie bijectief. QED

(d). **Te bewijzen**: Voor alle $a \in A, b \in B$ geldt dat $|A - \{a\}| = |B - \{b\}|$.

Bewijs. Zij nu $a \in A$ en $b \in B$ gegeven. Omdat de verzamelingen A en B dezelfde kardinaliteit hebben ($|A| = |B|$), is er een bijectie $f\colon A \to B$. We zoeken nu een bijectieve functie van $A - \{a\}$ naar $B - \{b\}$.

Allereerst gaan we bewijzen dat er een bijectie van A naar B is waarvoor $f(a) = b$. Omdat f surjectief is, weten we dat er een $a_1 \in A$ moet zijn, zodanig dat $f(a_1) = b$. Wanneer toevalligerwijze geldt dat $a_1 = a$, dan hoeven we niets te doen, maar als $a_1 \neq a$, beschouw dan de functie $f_{a_1,a}$. Volgens het in (c) bewezen lemma is dit een bijectie. Bovendien geldt volgens de definitie van die functie dat $f_{a_1,a}(a) = f(a_1) = b$. Vanaf nu kunnen we er dus vanuit gaan dat we een bijectie $f\colon A \to B$ hebben waarvoor $f(a) = b$.

Claim: De beperking van f tot $A - \{a\}$ is een bijectie van $A - \{a\}$ naar $B - \{b\}$.

Bewijs. Deze functie is namelijk:

goed gedefinieerd: Voor elke $x \in A - \{a\}$ geldt immers dat $f(x) \in B$ en omdat f injectief is en $x \neq a$, is $f(x) \neq f(a) = b$. Dus $f(x) \in B - \{b\}$.

surjectief: Voor elke $y \in B - \{b\}$ is er een $x \in A$ waarvoor $f(x) = y$, want f is surjectief. Omdat $f(a) = b$ en $y \neq b$, kan het niet zo zijn dat $x = a$, dus $x \in A - \{a\}$.

injectief: Als $f(x) = f(y)$ voor zekere $x, y \in A - \{a\} \subseteq A$, dan impliceert dit nog altijd dat $x = y$, omdat f injectief is.

QED

De beperking van f tot $A - \{a\}$ is in dit geval dus een bijectie van $A - \{a\}$ naar $B - \{b\}$. Dit betekent dat $A - \{a\}$ en $B - \{b\}$ inderdaad dezelfde kardinaliteit hebben.

QED