Name: .... ID: ....

Examen Discrete Wiskunde 2017-2018
donderdag 12 april, 2018

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Gebruik hiervoor de ruimte onder de vraag; er is in principe genoeg ruimte. Wanneer je een klein beetje ruimte te kort komt, dan kun je op de andere zijde onderaan doorschrijven (geef dit duidelijk aan); **je kunt ook een extra blad krijgen.** Schrijf op elk ingeleverd vel je naam en studentnummer.
- Wanneer u een bekende stelling wilt gebruiken, dan moet u die netjes formuleren; u hoeft hem niet te bewijzen.
- Wanneer u een algoritme wilt gebruiken, dan hoeft u alleen de naam van het algoritme te noemen en waarvoor u het wilt gebruiken. Er wordt een apart blaadje met algoritmen en stellingen uitgedeeld. U hoeft ook niet te bewijzen dat iets een groep is, indien u dit denkt nodig te hebben.
- Het is de bedoeling dat je ieder blaadje apart inlevert.
- Het examen omvat 7 opgaven met in totaal 15 (deel)opgaven.
- De maximale score bedraagt (totaal 53 punten):
  - 2 punten op vragen 2b, 7a.
  - 3 punten op vragen 2a, 2c, 2d, 2e, 5b, 6b.
  - 4 punten op vragen 5a, 6a, 7b, 7c.
  - 5 punten op vragen 1, 3, 4.
- Wanneer gevraagd wordt om een probleem op een bepaalde manier op te lossen, dan wordt iedere andere manier volledig fout gerekend. Enumeratie levert eveneens niets op.
- Een rekenmachine is niet nodig en derhalve verboden. Eventuele rekenfouten worden met de mantel der liefde bedekt, tenzij het de spuigaten uitloopt.

Succes!

==

Uitloop voor vraag 1.

Opgave 1. Beschouw het hieronder gegeven netwerk. De getallen bij de pijlen geven respectievelijk de waarde van de huidige stroom door die pijl en de capaciteit van die pijl aan. Bepaal de maximale stroom door dit netwerk en bewijs de maximaliteit van deze stroom met behulp van een minimale snede. **Geef alle stappen van uw berekening duidelijk aan, inclusief residuele graaf. Het uitsluitend vermelden van de oplossing wordt niet goedgerekend**.

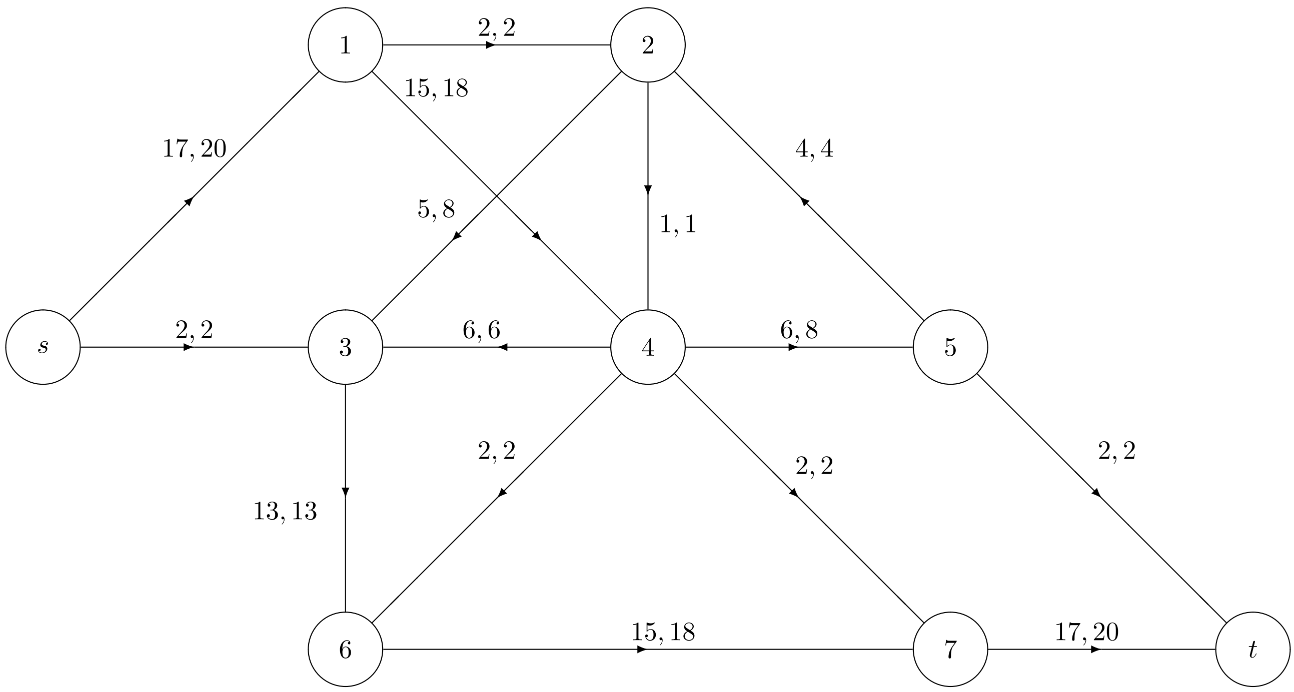

Figure 1: Netwerk

Indien nodig, ga door op de voorkant.

Opgave 2. 'Er was eens een molenaar, die leefde in een land dat bezet was door ...'. Na het beginverhaal dat is weggelaten om het tentamen wat korter te maken komt dan hier de essentiële informatie. Gegeven is een windmolen met acht wieken: vier grote en vier kleine, waarbij je om en om een grote en een kleine hebt. Door aan de wieken gekleurde vlaggen (rood, wit, blauw) te hangen (maximaal eentje per wiek) kunnen signalen worden overgebracht; wieken mogen ook leeg blijven. Om geen argwaan te wekken kan de molenaar de wieken niet vastzetten. We zijn geïnteresseerd in het aantal mogelijke, herkenbaar verschillende signalen dat kan worden overgebracht.

(a) Geef de verschillende permutaties (denk eraan dat je ze bij (b) ook nog nodig hebt).

(b) Gegeven de gewichten, bepaal de pattern inventory. U hoeft hierbij uiteraard machten van gewichten niet uit te werken.

(c) Bereken het aantal mogelijke, herkenbare signalen dat overgebracht kan worden, waarbij aan iedere wiek precies één vlag hangt.

(d) Naast de eis van (c) wordt verder nog geëist dat er van iedere kleur (rood, wit, blauw) minstens één vlag moet wapperen. Geef aan hoe je het aantal mogelijke, herkenbare signalen dat overgebracht kan worden kunt bepalen; je hoeft het niet uit te rekenen.

(e) De plaatselijke commandant wordt vervangen door een echte ijdeltuit. Deze vaardigt een verordening uit dat ter ere van hemzelf op één van de grote wieken een vlag moet hangen met daarop zijn portret (en verder uiteraard geen andere vlaggen op deze grote wiek). Op de grote wieken moet verder precies één witte vlag wapperen (ter ere van zijn vrouw) en op de kleine wieken precies twee rode vlaggen (ter ere van zijn kinderen). Bereken het aantal verschillende, onderscheidbare signalen dat nu nog kan worden overgebracht; houd er rekening mee dat niet aan iedere wiek een vlag hoeft te hangen.

Ga indien nodig door op de achterkant.

Restant uitwerking opgave 2.

Opgave 3. Gegeven is een trap met $2n$ treden. Deze moet worden geverfd; je kunt bij iedere trede kiezen uit de kleuren rood, geel en blauw. Bepaal het aantal manieren om deze trap te verven, zodanig dat het aantal rode treden even is, en het aantal blauwe en gele treden beide oneven is.

Opgave 4. Gegeven is een kaart van een ski-gebied. Deze kaart wordt omgezet in een gerichte acyclische graaf $G = (V, A)$. Punten zonder inkomende pijlen zijn beginpunten; punten zonder uitgaande pijlen zijn eindpunten. Vanuit ieder eindpunt kun je een lift nemen naar ieder beginpunt. Tussen twee punten v en w kunnen verschillende pijlen lopen; deze zijn dan genummerd als $(v, w)_1, (v, w)_2$, enz.

Iemand heeft zich tot doel gesteld om **zoveel mogelijk** afdalingen te maken waarbij **geen enkel deel van de piste meer dan eenmaal wordt bezocht, met uitzondering van kruispunten**. Dus wanneer v een beginpunt is en z een eindpunt en er zijn pijlen $(v, w)_1, (v, w)_2, (w, z)_1, (w, z)_2$, dan is het toegestaan om eerst de afdaling $(v, w)_1, (w, z)_1$ te maken, dan met de lift omhoog van z naar v en dan de afdaling $(v, w)_2, (w, z)_2$.

Geef aan hoe je dit probleem op kunt lossen.

Opgave 5. Op het plaatselijke schoolplein kunnen de kinderen buiten schooltijd heerlijk spelen, maar er moet wel toezicht zijn in de vorm van precies één ouder (als er twee of meer ouders tegelijkertijd aanwezig zijn, dan gaan ze kletsen en wordt er niet opgelet). Om een rooster op te kunnen stellen voor de periode $[0, T]$ geeft iedere ouder zijn beschikbaarheid op in de vorm van een interval waarin hij/zij aanwezig kan zijn: voor iedere ouder j ($j = 1, \ldots, n$) levert dit interval $[a_j, b_j]$ op, met $a_j \geq 0$ en $b_j \leq T$. Het doel is om een planning te vinden zodanig dat op ieder tijdstip precies één ouder aanwezig is en waarbij het aantal benodigde ouders wordt geminimaliseerd. Let er hierbij op dat ouder j gedurende het hele interval $[a_j, b_j]$ aanwezig is, als hij/zij wordt geselecteerd.

(a) Geef aan hoe je dit probleem efficiënt op kunt lossen (dus slimmer dan door middel van enumeratie).

(b) Helaas blijkt het niet iedere keer te lukken om een goede planning te vinden. Gelukkig is het mogelijk om één betaalde oppas (vanaf nu persoon X genoemd) in te huren die alle gaten in de planning voor zijn/haar rekening neemt. X is gedurende het hele interval $[0, T]$ beschikbaar, maar hij/zij gaat weg zodra één van de ouders komt oppassen. De kosten voor het inhuren van X bedragen voor ieder tijdsinterval q aan vaste kosten en c per tijdseenheid (dus als X in intervallen $[1, 2]$ en intervallen $[7, 9]$ oppast, dan kost dit $2q + 3c$). Het doel is nu om een planning te maken waarbij de kosten van X worden geminimaliseerd (het aantal ouders dat nodig is doet er niet meer toe). Geef aan hoe je dit probleem efficiënt op kunt lossen (dus slimmer dan door middel van enumeratie).

Ga indien nodig door op de achterkant.

Restant uitwerking opgave 5.

Opgave 6. Voor de energievoorziening in een bepaald gebied hebben we de beschikking over een centrale. Voor iedere periode t moet je bepalen hoeveel eenheden stroom je wilt produceren met een minimum van l en een maximum van u. De ideale output van deze centrale is een productie van Q eenheden stroom per tijdseenheid; je kunt ook meer of minder dan Q produceren, maar dit kost c_1 per eenheid voor minder produceren en c_2 per eenheid voor extra produceren. Verder is er nog decentrale opwekking van stroom: in periode t ($t = 1, \ldots, T$) worden er X_t eenheden stroom opgewekt. Verder heb je nog de beschikking over een batterij waarin je stroom kunt opslaan; de capaciteit van de batterij bedraagt M. In periode t bedraagt de vraag D_t eenheden; neem aan dat je die kunt beleveren door de stroom die in periode t is geproduceerd samen met de stroom die beschikbaar is in de batterij. Het doel is om in iedere periode aan alle vraag naar electriciteit te voldoen tegen minimale kosten.

(a) Formuleer een algoritme om een optimale oplossing voor dit probleem te vinden. Ga er hierbij van uit dat de batterij leeg is aan het begin van periode 1.

(b) Met behulp van slimme meters enz. is het mogelijk om Z_t eenheden van de vraag in periode t door te schuiven naar periode $t+1$, waarbij geldt dat $Z_T = 0$. Geef aan hoe u het bovenstaande algoritme moet veranderen om deze variant van het probleem op te lossen.

Ga indien nodig door op de achterkant.

Restant uitwerking opgave 6.

Opgave 7. Er zijn n rekenopdrachten, die door een computer moeten worden uitgevoerd. Om opdracht j uit te voeren kunnen we ervoor kiezen om de CPU of de GPU te gebruiken; het is niet mogelijk om een taak op te splitsen in een deel voor de CPU en een deel voor de GPU. De GPU is drie keer zo snel als de CPU: taak j ($j = 1, \ldots, n$) kost $3p_j$ tijdseenheden wanneer uitgevoerd door de CPU en p_j tijdseenheden wanneer uitgevoerd door de GPU. We willen de rekenopdrachten verdelen, zodanig dat de computer zo snel mogelijk klaar is; noem dit probleem CPU-GPU.

(a) Formueer de beslissingsvariant van het probleem CPU-GPU en geef aan aan welke voorwaarden voldaan moet worden wil deze beslissingsvariant tot de klasse $\mathcal{NP}$ behoort; u hoeft deze voorwaarden niet te checken.

(b) Toon aan dat het de beslissingsvariant van het probleem CPU-GPU $\mathcal{NP}$-volledig. U moet hierbij gebruiken dat het probleem Partitie $\mathcal{NP}$-volledig is. Formuleer de reductie en bewijs de correctheid ervan; u hoeft niet te bewijzen dat de reductie polynomiaal is. Het probleem Partitie is als volgt gedefinieerd: gegeven t niet-negatieve gehele getallen $a_1, \ldots, a_t$, bestaat er een deelverzameling S van de indexverzameling $\{1, \ldots, t\}$ waarvoor geldt

$$\sum_{j \in S} a_j = (\sum_{j=1}^{t} a_j)/2?$$

Wanneer u niet in staat bent om deze reductie te geven, dan kunt u nog punten verdienen door het achterliggende idee van een reductie uit te leggen.

(c) Stel dat iemand beweert dat hij een algoritme heeft ontwikkeld dat **voor iedere instantie** van het probleem CPU-GPU in polynomiale tijd een toegelaten oplossing vindt die maximaal 10 tijdseenheden boven het optimum zit (dus als het optimum z^* is, dan vindt dit algoritme een oplossing met waarde $\leq z^* + 10$). Welke conclusie kunt u dan trekken? Motiveer uw antwoord.

Ga indien nodig door op de achterkant.

Restant uitwerking opgave 7.