Herexamen Discrete Wiskunde 2017-2018 delen I en II

donderdag 5 juli, 2018

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer. Gebruik hiervoor de ruimte onder de vraag; er is in principe genoeg ruimte. Wanneer je een klein beetje ruimte te kort komt, dan kun je op de volgende bladzijde onderaan doorschrijven (geef dit duidelijk aan). Je kunt ook een extra blad krijgen.
- Het examen omvat 10 opgaven met in totaal 15 (deel)opgaven.
- Op de vragen 1a, 3a, 7a, 7b kunnen maximaal 2 punten worden gescoord; op alle overige vragen kunnen maximaal 4 punten worden gescoord. Totaal 52 punten.
- Wanneer gevraagd wordt om een probleem op een bepaalde manier op te lossen, dan wordt iedere andere manier volledig fout gerekend. Enumeratie levert eveneens niets op.
- Een rekenmachine is niet nodig en derhalve verboden. Eventuele rekenfouten worden niet bestraft, tenzij het de spuigaten uitloopt (dit ter beoordeling van de nakijker).
- Een blaadje met formules wordt los uitgedeeld.

Succes!

==

Uitloop voor vraag 1.

Name: .... ID: ....

Opgave 1. Los de onderstaande recurrente betrekkingen op met de JBF methode (karakteristieke vergelijking, particuliere oplossing, enz.). U mag eerder gevonden resultaten uiteraard hergebruiken.

$$(a) \quad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \quad \text{voor } n \geq 2 \text{ met } a_0 = 1 \text{ en } a_1 = 4.$$

$$(b) \quad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 4 * 2^n + n \quad \text{voor } n \geq 2 \text{ met } a_0 = 5 \text{ en } a_1 = 13.$$

Opgave 2. We zoeken het aantal mogelijke tupels (a_1, a_2, a_3, a_4), waarbij $a_i \in \{1, 2, \ldots, 15\}$ voor alle $i = 1, 2, 3, 4$ en waarvoor geldt $a_1 < a_2 - 1 < a_3 - 2 < a_4 - 4$. Gegeven is dat dit aantal gelijk is aan $\binom{n}{m}$. Bepaal m en n en bewijs de correctheid van uw antwoord.

Opgave 3. Een tafereeltje uit de jaren 50: een schoolklas gaat onder leiding van een leerkracht op schoolreisje. In de klas zitten 25 meisjes en 21 jongens. Ieder kind krijgt op volstrekt willekeurige wijze een nummer van 1 t/m 46 in de hand gedrukt. Daarna geeft ieder kind met nummer j ($j = 2, \ldots, 45$) de kinderen met nummers $j-1$ en $j+1$ een hand; de leerkracht geeft de kinderen met nummer 1 en met nummer 46 een hand, zodat er een kring wordt gevormd.

(a) Bereken de kans dat de leerkracht een jongen en een meisje een hand geeft. De uitkomst moet een getal (breuk) zijn zonder sommaties.

(b) De leerkracht stapt eruit, zodat een rij van 46 kinderen overblijft. Bereken de kans dat de rij bestaat uit 13 groepjes jongens en 12 groepjes meisjes (dus dat er op beide eindpunten van de rij een jongen staat en dat er precies 12 jongens met hun linkerhand de rechterhand van een meisje vasthouden).

Opgave 4. De functie $f(n)$ is gedefinieerd als

$$f(n) = (4+\sqrt{13})^n + (4-\sqrt{13})^n,$$

voor ieder niet-negatief geheel getal n. Toon aan dat $f(n)$ geheeltallig is voor ieder priemgetal $n \geq 3$.

Opgave 5. Tien vrienden gaan ter voorbereiding op het carnaval bier drinken; persoon i drinkt n_i glazen bier met $11 \leq n_i \leq 20$ voor alle $i = 1, \ldots, 10$; ze hoeven dus niet allemaal een verschillend aantal biertjes te drinken. Daarna bewijzen ze dat ze allemaal goed tegen zoveel bier kunnen door te gaan kaarten: 6 gaan pokeren, en twee paren spelen bridge. Voor het bepalen van de bridgeparen geldt de speciale regel dat het aantal geconsumeerde biertjes per paar gelijk moet zijn (dus als je paren $\{a, b\}$ en $\{c, d\}$ hebt, dan moet de bierconsumptie van a en b in totaal gelijk zijn aan die van c en d). Indien het niet mogelijk is om die twee paren samen te stellen, dan wordt er extra bier gedronken tot het wel mogelijk is. Hoeveel biertjes moeten er maximaal extra worden gedronken?

Opgave 6. Een storm geselt het vlakke land, waarop een verzameling van n boompjes staan. Bij iedere rukwind worden de boompjes getest: als er nog k boompjes staan, dan is er een kans van $1/(k+1)$ dat er j boompjes omgaan, voor alle $j = 0, \ldots, k$. Bepaal het verwachte aantal rukwinden $T(n)$ dat nodig is om de n boompjes om te krijgen. Er geldt $T(1) = 2$.

De verwachte waarde $E(X)$ van een discreet verdeelde stochast X is gelijk aan $\sum_q qP(q)$, waarbij $P(q)$ de kans is op uitkomstwaarde q. Bij een dobbelsteen bijv. is het verwachte aantal ogen gelijk aan $1 * 1/6 + 2 * 1/6 + \ldots + 6 * 1/6 = 3,5$, want de kans op q ogen is $1/6$ voor $q = 1, \ldots, 6$.

Hint. Stel een recurrente betrekking op voor $T(n)$.

Opgave 7. *Beschouw de onderstaande schematische weergave van een kloon van Monsieur Canibale. Er zijn acht ketels (genummerd 1 t/m 8) die op een aantal draaischijven staan. De ketels 3, 4, 7, 8 zijn de zogenaamde rustige familieketels; ze maken alleen grote rondes. De kleine, zogenaamde wilde ketels 1, 2, 5, 6 draaien ook nog rond op de kleine draaischijven, zodat bijv. ketel 1 soms aan de buitenkant en soms aan de binnenkant is; deze twee kleine schijven opereren onafhankelijk van elkaar. De ketels 3, 4, 7, 8 zijn identiek, evenals de ketels 1, 2, 5, 6. De ketels moeten worden geverfd, en het gaat om het aantal herkenbaar verschillende kleuringen (het aantal equivalentieklassen in het jargon van DW).*

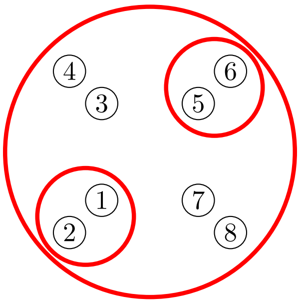

Figure 1: Kloon Monsieur Canibale: schematisch

(a) Geef **expliciet** *de verschillende permutaties (denk eraan dat je ze bij (b) nodig hebt). Je mag vanaf nu aannemen dat deze permutaties een groep vormen.*

(b) De ketels worden geverfd; hiervoor hebben we de kleuren rood, wit, blauw en zwart beschikbaar. Gegeven de gewichten $w(\textit{rood}) = r$, $w(\textit{wit}) = w$, $w(\textit{blauw}) = b$ en $w(\textit{zwart}) = z$, bepaal de pattern inventory (notatie $Inve(r, w, b, z)$). U mag hierbij uiteraard machten van $(r + w + b + z)$, enz. laten staan.

(c) Bepaal het aantal equivalentieklassen dat geen rode ketels bevat, precies één witte, en meer zwarte dan blauwe ketels, waarbij u zoveel mogelijk geschikte getallen invult. Enumeratie levert niets op.

(d) Bepaal het aantal equivalentieklassen dat geen zwarte ketels, en een even aantal (mag 0 zijn) witte ketels bevat. U mag hierbij alleen **getallen** *invullen; enumeratie levert niets op. Om het rekenwerk te beperken hoeft u alleen de formules te geven in termen van $Inve(r, w, b, z)$ waarbij u dan aangeeft welke getallen u invult.* **Motiveer uw antwoord.**

Ga indien nodig door op de achterkant.

Restant uitwerking opgave 7.

Opgave 8. Gegeven is een groep studenten die in een willekeurig ski-gebied zijn beland. De folder van het gebied claimt dat er minstens 100 verschillende afdalingen gemaakt kunnen worden, en dit moet natuurlijk worden gecheckt. Daartoe wordt een kaart van het ski-gebied gepakt, en die wordt vertaald in een gerichte graaf. Hierbij corresponderen de punten met de kruispunten in de afdalingen; verder zijn er punten waar een lift eindigt (beginpunten) en waar een afdaling eindigt (eindpunten). Twee punten v en w zijn verbonden met een pijl (v, w) indien je direct van v naar w kunt skiën zonder dat je een ander punt tegenkomt. Indien er twee (of meer) duidelijk verschillende mogelijkheden zijn om rechtstreeks van v naar w te skiën, dan neem je twee (of meer) pijlen tussen v en w op. Omdat je natuurlijk wilt skiën (dus niet jezelf omhoog duwen), nemen we aan dat een pijl (v, w) alleen kan bestaan indien v hoger ligt dan w.

Samenvatting met extra informatie: je hebt een gegeven gerichte acyclische graaf $G = (V, A)$. Punten zonder inkomende pijlen zijn beginpunten; punten zonder uitgaande pijlen zijn eindpunten. Tussen twee punten kunnen verschillende pijlen lopen; die nummer je dan als $(v, w)_1, (v, w)_2$, enz. Definieer q_{vw} als het aantal verschillende pijlen van v naar w. Hernummer de punten in V als $1, \ldots, n$, met $n = |V|$, zodanig dat voor iedere pijl $(v, w) \in A$ geldt dat $v < w$ (dit kan omdat de graaf acyclisch is). Neem aan dat er k beginpunten zijn en nummer deze $1, \ldots, k$. Neem verder aan dat er m eindpunten zijn en nummer deze $n - m + 1, \ldots, n$. Van iedere pijl is bekend wat zijn lengte is, en hoe deze is gekleurd (groen, blauw, rood, zwart). Een afdaling begint bij een beginpunt en eindigt bij een eindpunt; twee afdalingen zijn verschillend indien ze minstens één verschillende pijl bevatten; hierbij tellen $(v, w)_1$ en $(v, w)_2$ als verschillende pijlen. Vanuit ieder eindpunt kun je naar ieder beginpunt komen met de lift; een stuk met de lift wordt **niet** tot de afdaling gerekend. Introduceer dummy punt s met pijlen $(s, 1), \ldots, (s, k)$ en dummy punt t met pijlen $(n - m + 1, t), \ldots, (n, t)$. A bevat nu alle pijlen inclusief dummy pijlen.

Geef een DP-algoritme om het aantal verschillende afdalingen te bepalen.

Opgave 9. Gegeven de situatie van Opgave 8. Uiteraard wordt er voor de echte skiërs een wedstrijd georganiseerd. Daartoe wordt een commissie gevormd die op zoek gaat naar een geschikt parcours (uiteraard moet dit één afdaling zijn zonder weer met de lift omhoog te gaan). Geschikt betekent dat er moet worden voldaan aan de volgende eisen:

- er worden alleen rode en zwarte pistes gebruikt;
- er worden geen omwegen gevolgd, want dat gaat ten koste van de moeilijkheid (wanneer je bijv. $(v, w)_1$ en $(v, w)_2$ hebt, dan mag je alleen de kortste van deze twee pijlen gebruiken, mits rood of zwart);
- de totale lengte (in kilometers) van het parcours ligt zo dicht mogelijk bij 3, maar bedraagt minstens 2.9.

Geef aan hoe u dit probleem op kunt oplossen met een algoritme dat in polynomiale tijd loopt.

Opgave 10. Gegeven de situatie van Opgave 8. Naast de fanatieke skiërs van Opgave 9 zijn er ook de meer recreatieve skiërs, die graag de omgeving willen verkennen. Hun doel is om een **zo klein mogelijk** aantal afdalingen maken, maar wel onder de voorwaarde dat iedere iedere piste (pijl) minstens éénmaal wordt doorkruist (genomen); hierbij zijn $(v, w)_1$ en $(v, w)_2$ verschillende pijlen. Geef aan hoe je dit probleem op kunt lossen met uw kennis van stroomproblemen (al dan niet met kosten erbij), waarbij de **ondergrens** op de stroom door een pijl gelijk is aan 0 (de ondergrens is niet de capaciteit). Wanneer dat niet lukt, dan kunt u nog punten verdienen door te werken met een ondergrens op de capaciteit die positief kan zijn.