Universiteit Utrecht
Betafaculteit

Herexamen deel II van Discrete Wiskunde
donderdag 5 juli 2018, 13.30-16.30 uur.

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer.
- Een rekenmachine is niet nodig en derhalve verboden. Eventuele rekenfouten worden niet bestraft, tenzij het de spuigaten uitloopt (dit ter beoordeling van de nakijker).
- Het examen omvat 7 opgaven met in totaal 12 (deel)opgaven.
- De maximale score per onderdeel bedraagt:
  - 5 punten voor ieder van de vragen 3, 5, 6, 7;
  - 4 punten voor ieder van de vragen 1c, 2b, 4a, 4b;
  - 3 punten voor onderdelen 1a, 1d;
  - 2 punten voor onderdelen 1b, 2a.

  Totaal 46 punten.

Succes!

==

Opgave 1.
Beschouw de onderstaande schematische weergave van een kloon van Monsieur Canibale. Er zijn acht ketels (genummerd 1 t/m 8) die op een aantal draaischijven staan. De ketels 3, 4, 7, 8 zijn de zogenaamde rustige familieketels; ze maken alleen grote rondes. De kleine, zogenaamde wilde ketels 1, 2, 5, 6 draaien ook nog rond op de kleine draaischijven, zodat bijv. ketel 1 soms aan de buitenkant en soms aan de binnenkant is; deze twee kleine schijven opereren onafhankelijk van elkaar. De ketels 3, 4, 7, 8 zijn identiek, evenals de ketels 1, 2, 5, 6. De ketels moeten worden geverfd, en het gaat om het aantal herkenbaar verschillende kleuringen (het aantal equivalentieklassen in het jargon van DW).
(a) Geef **expliciet** de verschillende permutaties (denk eraan dat je ze bij (b) nodig hebt). Je mag vanaf nu aannemen dat deze permutaties een groep vormen.

(b) De ketels worden geverfd; hiervoor hebben we de kleuren rood, wit, blauw en zwart beschikbaar. Gegeven de gewichten $w(\text{rood}) = r$, $w(\text{wit}) = w$, $w(\text{blauw}) = b$ en $w(\text{zwart}) = z$, bepaal de pattern inventory (notatie $\text{Inve}(r, w, b, z)$). U mag hierbij uiteraard machten van $(r + w + b + z)$, enz. laten staan.

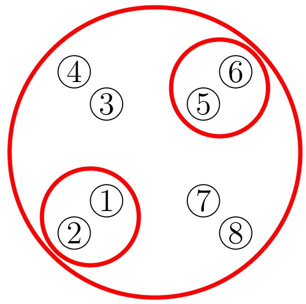

Figure 1: Kloon Monsieur Canibale: schematisch

(c) Bepaal het aantal equivalentieklassen dat geen rode ketels bevat, precies één witte, en meer zwarte dan blauwe ketels, waarbij u zoveel mogelijk geschikte getallen invult. Enumeratie levert niets op.

(d) Bepaal het aantal equivalentieklassen dat geen zwarte ketels, en een even aantal (mag 0 zijn) witte ketels bevat. U mag hierbij alleen **getallen** invullen; enumeratie levert niets op. Om het rekenwerk te beperken hoeft u alleen de formules te geven in termen van $Inve(r, w, b, z)$ waarbij u dan aangeeft welke getallen u invult. **Motiveer uw antwoord.**

Opgave 2.

Het Langste Acyclische Pad (LAP) probleem is gedefinieerd als volgt: Gegeven is een willekeurige ongerichte graaf $G = (V, E)$, waarbij voor iedere kant $e \in E$ geldt dat $l(e)$ de lengte van die kant aangeeft. Gevraagd wordt om de lengte van het **langste pad zonder cykels** te bepalen dat in de graaf loopt; hierbij mag je dus zelf bepalen tussen welke punten dit pad loopt, zolang het maar het langste pad in de graaf is.

(a) Definieer de beslissingsvariant BVLAP van LAP, en toon aan dat BVLAP tot de klasse NP behoort. U hoeft u hierbij de polynomialiteit van de verschillende onderdelen niet aan te tonen, zolang u maar zegt wat er moet gebeuren.

(b) Toon aan dat BVLAP $\mathcal{NP}$-volledig is. U mag hierbij gebruiken dat het Hamiltoncykel en het Hamiltonpad probleem $\mathcal{NP}$-volledig zijn.

Het Hamiltoncykel probleem is als volgt gedefinieerd: Gegeven een **willekeurige samenhangende** graaf $G' = (V', E')$, bevat deze graaf een tour die ieder punt $v \in V'$ precies éénmaal bezoekt?

Het Hamiltonpad probleem is als volgt gedefinieerd: Gegeven een **willekeurige samenhangende** graaf $G' = (V', E')$, bevat deze graaf een pad dat ieder punt $v \in V'$ precies éénmaal bezoekt?

Opgave 3.
Beschouw het hieronder gegeven netwerk. De getallen bij de pijlen geven respectievelijk de waarde van de huidige stroom door die pijl en de capaciteit van die pijl aan. Bepaal de maximale stroom door dit netwerk en bewijs de maximaliteit van deze stroom met behulp van een minimale snede. **Geef alle stappen van uw berekening duidelijk aan, inclusief residuele graaf. Het uitsluitend vermelden van de oplossing wordt niet goedgerekend**.

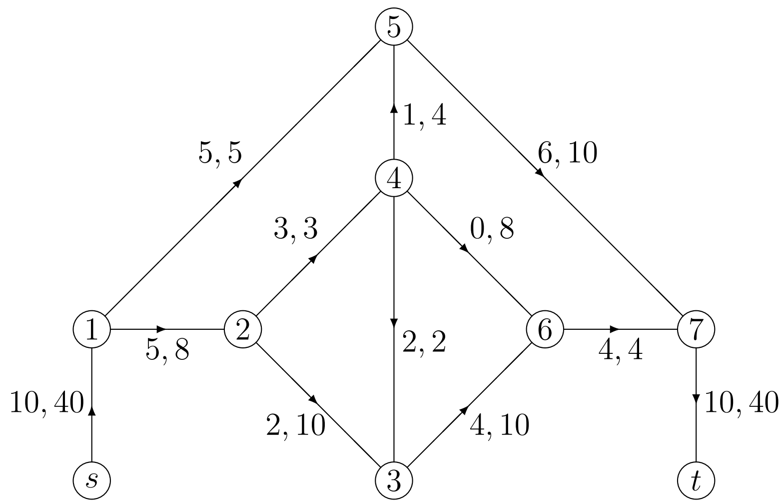

Figure 2: Netwerk.

Opgave 4.
Gegeven is een groep studenten die in een willekeurig ski-gebied zijn beland. De folder van het gebied claimt dat er minstens 100 verschillende afdalingen gemaakt kunnen worden, en dit moet natuurlijk worden gecheckt. Daartoe wordt een kaart van het ski-gebied gepakt, en die wordt vertaald in een gerichte graaf. Hierbij corresponderen de punten met de kruispunten in de afdalingen; verder zijn er punten waar een lift eindigt (beginpunten) en waar een afdaling eindigt (eindpunten). Twee punten v en w zijn verbonden met een pijl (v, w) indien je direct van v naar w kunt skiën zonder dat je een ander punt tegenkomt. Indien er twee (of meer) duidelijk verschillende mogelijkheden zijn om rechtstreeks van v naar w te skiën, dan neem je twee (of meer) pijlen tussen v en w op. Omdat je natuurlijk wilt skiën (dus niet jezelf omhoog duwen), nemen we aan dat een pijl (v, w) alleen kan bestaan indien v hoger ligt dan w.

Samenvatting met extra informatie: je hebt een gegeven gerichte acyclische graaf $G = (V, A)$. Punten zonder inkomende pijlen zijn beginpunten; punten zonder uitgaande pijlen zijn eindpunten. Tussen twee punten kunnen verschillende pijlen lopen; die nummer je dan als $(v, w)_1, (v, w)_2$, enz. Definieer q_{vw} als het aantal verschillende pijlen van v naar w. Hernummer de punten in V als $1, \ldots, n$, met $n = |V|$, zodanig dat voor iedere pijl $(v, w) \in A$ geldt dat $v < w$ (dit kan omdat de graaf acyclisch is). Neem aan dat er k beginpunten zijn en nummer deze $1, \ldots, k$. Neem verder aan dat er m eindpunten zijn en nummer deze $n - m + 1, \ldots, n$. Van iedere pijl is bekend wat zijn lengte is, en hoe deze is gekleurd (groen, blauw, rood, zwart). Een afdaling begint bij een beginpunt en eindigt bij een eindpunt; twee afdalingen zijn verschillend indien ze minstens één verschillende pijl bevatten; hierbij tellen $(v, w)_1$ en $(v, w)_2$ als verschillende pijlen. Vanuit ieder eindpunt kun je naar ieder beginpunt komen met de lift; een stuk met de lift wordt **niet** tot de afdaling gerekend. Introduceer dummy punt s met pijlen $(s, 1), \ldots, (s, k)$ en dummy punt t met pijlen $(n - m + 1, t), \ldots, (n, t)$. A bevat nu alle pijlen inclusief dummy pijlen

(a) Geef een DP-algoritme om het aantal verschillende afdalingen te bepalen.

(b) De verschillende pijlen zijn gecodeerd met kleuren groen, blauw, rood en zwart, afhankelijk van de moeilijkheid van de afdaling. Omdat groene pistes niet zo uitdagend zijn, wensen de studenten afdalingen met die kleur niet voor vol aan te zien. Maar, omdat sommige interessante afdalingen soms een groen intermezzo bevatten, worden afdalingen met maximaal één groene pijl toch gedoogd. Geef aan hoe je het DP van (a) kunt aanpassen om het aantal verschillende afdalingen met maximaal één groene pijl te tellen.

Opgave 5.

Beschouw weer dezelfde situatie als bij Opgave 4. Het blijkt dat het aantal afdalingen dat gevonden is bij Opgave 4 toch wel wat groot is voor een dagje relaxed skiën. Daarom besluit men zich te beperken tot het maken van **zoveel mogelijk** afdalingen waarbij **geen enkel deel van de piste meer dan eenmaal wordt bezocht, met uitzondering van kruispunten en liften**. Geef aan hoe je dit probleem op kunt lossen.

Opgave 6.

Beschouw weer dezelfde situatie als bij Opgave 4. Het dagje skiën dat gevonden is bij Opgave 5 is wel heel relaxed, en daarom besluit men tot een tussenweg tussen Opgaven 4 en 5. Men wil een **zo klein mogelijk** aantal afdalingen maken, maar wel onder de voorwaarde dat iedere iedere piste (pijl) minstens éénmaal wordt doorkruist (genomen); hierbij zijn $(v, w)_1$ en $(v, w)_2$ verschillende pijlen. Geef aan hoe je dit probleem op kunt lossen met uw kennis van stroomproblemen (al dan niet met kosten erbij), waarbij de **ondergrens** op de stroom door een pijl gelijk is aan 0 (de ondergrens is niet de capaciteit). Wanneer dat niet lukt, dan kunt u nog punten verdienen door te werken met een ondergrens op de capaciteit die positief kan zijn.

Opgave 7.

Bij het oplossen van het HANDELSREIZIGERSPROBLEEM op een graaf $G = (V, E)$ met behulp van *branch-and-bound* gebruikt men een zogenaamde *1-tree*. Een 1-tree bestaat uit een opspannende boom plus één extra kant, waarbij vooraf een verzameling kanten D is gegeven die allemaal zeker tot de 1-tree moeten behoren. Gegeven de graaf $G = (V, E)$ met gegeven lengte $l(e) > 0$ voor iedere kant $e \in E$ en gegeven de kantenverzameling $D \subset E$, geef aan hoe je een 1-tree van minimale lengte kunt bepalen die alle kanten in D bevat. U mag er hierbij van uit gaan dat D een acyclische deelgraaf van E is en dat er geen twee kanten zijn met gelijke lengte. **Bewijs de correctheid van uw algorithme; u mag hierbij uitgaan van de correctheid van de bij het college behandelde algoritmen om een minimale opspannende boom te bepalen**.

Formules en algoritmen

Inclusion-Exclusion

Stel dat er in totaal N objecten zijn. Ieder object kan r verschillende eigenschappen, $a_1, \ldots, a_r$, bezitten. Het aantal objecten dat eigenschappen $a_{i_1}, \ldots, a_{i_t}$ bezit (en mogelijk nog andere eigenschappen) wordt genoteerd met $N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$; met $s_t = \sum N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$ wordt aangegeven dat er wordt gesommeerd over iedere combinatie van t ($t = 1, \ldots, r$) verschillende eigenschappen. Verder geeft $N(a'_1, \ldots, a'_r)$ het aantal van de N objecten aan die geen enkele van de r eigenschappen bezitten. Nu geldt

$$N(a'_1, \ldots, a'_r) = N - s_1 + s_2 + \ldots + (-1)^r s_r = N + \sum_{t=1}^{r} (-1)^t s_t$$

Het aantal objecten met precies m eigenschappen is gelijk aan

$$e_m = \sum_{t=0}^{r-m} (-1)^t \binom{m+t}{t} s_{m+t}$$

Op het college behandelde algoritmen

- Algoritme van Dijkstra: Dit bepaalt het kortste pad van punt s naar ieder ander punt t in een gerichte graaf $G = (V, A)$. Voorwaarde is dat alle afstanden ≥ 0 zijn.
- Algoritme van Bellman-Ford: Als boven, maar het werkt ook als er pijlen zijn met negatieve lengte, zolang er maar geen cykels zijn met negatieve lengte.
- Algoritme van Kruskal: Gegeven een samenhangende, ongerichte graaf $G = (V, E)$ bepaal je een Minimum Spanning Tree door de kanten aan een (oorspronkelijk lege) kantenverzameling S toe te voegen in volgorde van lengte, waarbij een kant weer wordt verwijderd indien deze tot een cykel in de kantenverzameling S leidt.
- Algoritme van Ford-Fulkerson: Dit bepaalt een stroom van maximale omvang van source (bron) s naar sink (put) t in een gerichte graaf $G = (V, A)$, waarbij voor iedere pijl $(v, w) \in A$ een capaciteit $c(v, w)$ is gegeven. Er geldt dat de ondergrens op de stroom door (v, w) gelijk is aan 0.
- Algoritme voor oplossen van min-cost max-flow probleem: Dit bepaalt de goedkoopste stroom van maximale omvang van source (bron) s naar sink (put) t in een gerichte graaf $G = (V, A)$, waarbij voor iedere pijl $(v, w) \in A$ een capaciteit $c(v, w)$ en kosten $k(v, w)$ zijn gegeven. De kosten van een stroom zijn gelijk aan

  $$\sum_{(v,w) \in A} k(v, w) x_{vw},$$

  waarbij x_{vw} de omvang van de stroom door de pijl (v, w) is. Er geldt weer dat de ondergrens op de stroom door (v, w) gelijk is aan 0.