Herexamen Discrete Wiskunde 2017-2018 deel I
donderdag 5 juli, 2018

- De opgaven dienen duidelijk uitgewerkt te zijn en netjes ingeleverd te worden. Schrijf op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer. Gebruik hiervoor de ruimte onder de vraag; er is in principe genoeg ruimte. Wanneer je een klein beetje ruimte te kort komt, dan kun je op de volgende bladzijde onderaan doorschrijven (geef dit duidelijk aan).
- Het examen omvat 11 opgaven met in totaal 14 (deel)opgaven.
- Op de vragen 1a en 5a kunnen maximaal 3 punten worden gescoord; op alle overige vragen kunnen maximaal 4 punten worden gescoord. Totaal 54 punten.
- Wanneer gevraagd wordt om een probleem op een bepaalde manier op te lossen, dan wordt iedere andere manier volledig fout gerekend. Enumeratie levert eveneens niets op.
- Een rekenmachine is niet nodig en derhalve verboden. Eventuele rekenfouten worden niet bestraft, tenzij het de spuigaten uitloopt (dit ter beoordeling van de nakijker).
- Helemaal achteraan zit een bladzijde met formules.

Succes!

==

Uitloop voor vraag 1.

Name: .... ID: ....

Opgave 1. Los de onderstaande recurrente betrekkingen op met de JBF methode (karakteristieke vergelijking, particuliere oplossing, enz.). U mag eerder gevonden resultaten uiteraard hergebruiken.

$$(a) \quad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \quad \text{voor } n \geq 2 \text{ met } a_0 = 1 \text{ en } a_1 = 4.$$

$$(b) \quad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 4 * 2^n + n \quad \text{voor } n \geq 2 \text{ met } a_0 = 5 \text{ en } a_1 = 13.$$

Opgave 2. We zoeken het aantal mogelijke tupels (a_1, a_2, a_3, a_4), waarbij $a_i \in \{1, 2, \ldots, 15\}$ voor alle $i = 1, 2, 3, 4$ en waarvoor geldt $a_1 < a_2 - 1 < a_3 - 2 < a_4 - 4$. Gegeven is dat dit aantal gelijk is aan $\binom{n}{m}$. Bepaal m en n en bewijs de correctheid van uw antwoord.

Opgave 3. Gegeven is een standaard pak kaarten (van ieder van de vier kleuren Schoppen, Harten, Ruiten en Klaveren zijn er dertien kaarten). Hieruit worden willekeurig 13 kaarten getrokken. Er is sprake van een 4333-verdeling, indien de 13 kaarten zodanig zijn getrokken dat er één kleur (van de vier) is waar vier kaarten van worden getrokken en dat van de overige kleuren er drie kaarten worden getrokken. Evenzo is er sprake van een 5332-verdeling, indien de 13 kaarten zodanig zijn getrokken dat er één kleur (van de vier) is waar vijf kaarten van worden getrokken, er één kleur is waarvan twee kaarten zijn getrokken en er van de overige kleuren drie kaarten zijn getrokken. Bereken de kans op een 4333-verdeling, bereken de kans op een 5332-verdeling, en ga na welke van deze twee verdelingen de meeste kans heeft. De kans zelf hoef je niet uit te rekenen.

Opgave 4. Geef een **combinatorisch** bewijs voor de gelijkheid

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \lceil \frac{k+1}{2} \rceil x^k$$

Opgave 5. Een tafereeltje uit de jaren 50: een schoolklas gaat onder leiding van een leerkracht op schoolreisje. In de klas zitten 25 meisjes en 21 jongens. Ieder kind krijgt op volstrekt willekeurige wijze een nummer van 1 t/m 46 in de hand gedrukt. Daarna geeft ieder kind met nummer j ($j = 2, \ldots, 45$) de kinderen met nummers $j-1$ en $j+1$ een hand; de leerkracht geeft de kinderen met nummer 1 en met nummer 46 een hand, zodat er een kring wordt gevormd.

(a) Bereken de kans dat de leerkracht een jongen en een meisje een hand geeft. De uitkomst moet een getal (breuk) zijn zonder sommaties.

(b) De leerkracht stapt eruit, zodat een rij van 46 kinderen overblijft. Bereken de kans dat de rij bestaat uit 13 groepjes jongens en 12 groepjes meisjes (dus dat er op beide eindpunten van de rij een jongen staat en dat er precies 12 jongens met hun linkerhand de rechterhand van een meisje vasthouden).

Opgave 6. De functie $f(n)$ is gedefinieerd als

$$f(n) = (4 + \sqrt{13})^n + (4 - \sqrt{13})^n,$$

voor ieder niet-negatief geheel getal n. Toon aan dat $f(n)$ geheeltallig is voor ieder priemgetal $n \geq 3$.

Opgave 7. De twee teams die in de reguliere competitie het hoogst zijn geëindigd spelen na afloop een play-off in de vorm van een 'best of $2n+1$' tegen elkaar: wie het eerst $n+1$ wedstrijden wint is de eindwinnaar. Iedere expert beschouwt de teams als gelijkwaardig, en derhalve heeft ieder team een kans van 50% om een wedstrijd te winnen, en dus ook om eindwinnaar te worden. Dit is tegen het zere been van de sponsor van Team 1, die natuurlijk wil dat de kans dat zijn/haar team wint zo groot mogelijk is. Na een onderonsje met de leden van de overkoepelende bond weet deze sponsor te regelen dat het team dat na afloop van de reguliere competitie bovenaan staat (laat dat nou net Team 1 zijn) een voordeel krijgt: dit team hoeft slechts n wedstrijden te winnen, terwijl Team 2 wel $n+1$ wedstrijden moet winnen om eindwinnaar te worden. Bepaal de kans dat Team 1 eindwinnaar wordt; hier **geen sommatie in voorkomen**. Voor iedere losse wedstrijd geldt nog steeds dat beide teams 50% kans hebben om te winnen.

Hint. Vergelijk de nieuwe met de oude situatie.

Opgave 8. Beschouw het KLEINE STOELEN probleem dat als volgt is gedefinieerd. Een groep westerlingen gaat op bezoek in een land als Zuid-Korea. Bij een conferentie staat een rij van n stoelen klaar voor de bezoekers, maar helaas, de grootte van de stoelen levert een beperking op: wanneer een westerling daarop gaat zitten, dan steekt er aan de zijkant wat uit.

(a) Neem aan dat de stoelen zo klein zijn (in verhouding tot de bezoekers) dat het niet mogelijk is dat er twee mensen naast elkaar kunnen zitten. Stel dat er k personen willen gaan zitten op die n stoelen. Bereken het aantal mogelijkheden om die mensen op die n stoelen te plaatsen, zodanig dat er niet twee mensen direct naast elkaar zitten. Ga er hierbij van uit dat de mensen **onherkenbaar** zijn.

(b) Bij nader inzien valt het wel mee: het is wel mogelijk om twee mensen direct naast elkaar plaats te laten nemen, maar drie mensen direct naast elkaar past echt niet. Bepaal de recurrente betrekking a_n die het aantal mogelijke, toegelaten bezettingen van die rij van n stoelen weergeeft, waarbij het aantal mensen variabel mag zijn; de mensen zijn weer onherkenbaar.

Enumeratie kost alleen tijd en levert niets op.

Opgave 9. Tien vrienden gaan ter voorbereiding op het carnaval bier drinken; persoon i drinkt n_i glazen bier met $11 \leq n_i \leq 20$ voor alle $i = 1, \ldots, 10$; ze hoeven dus niet allemaal een verschillend aantal biertjes te drinken. Daarna bewijzen ze dat ze allemaal goed tegen zoveel bier kunnen door te gaan kaarten: 6 gaan pokeren, en twee paren spelen bridge. Voor het bepalen van de bridgeparen geldt de speciale regel dat het aantal geconsumeerde biertjes per paar gelijk moet zijn (dus als je paren $\{a, b\}$ en $\{c, d\}$ hebt, dan moet de bierconsumptie van a en b in totaal gelijk zijn aan die van c en d). Indien het niet mogelijk is om die twee paren samen te stellen, dan wordt er extra bier gedronken tot het wel mogelijk is. Hoeveel biertjes moeten er maximaal extra worden gedronken?

Opgave 10. Een storm geselt het vlakke land, waarop een verzameling van n boompjes staan. Bij iedere rukwind worden de boompjes getest: als er nog k boompjes staan, dan is er een kans van $1/(k+1)$ dat er j boompjes omgaan, voor alle $j = 0, \ldots, k$. Bepaal het verwachte aantal rukwinden $T(n)$ dat nodig is om de n boompjes om te krijgen. Er geldt $T(1) = 2$.

De verwachte waarde $E(X)$ van een discreet verdeelde stochast X is gelijk aan $\sum_q qP(q)$, waarbij $P(q)$ de kans is op uitkomstwaarde q. Bij een dobbelsteen bijv. is het verwachte aantal ogen gelijk aan $1 * 1/6 + 2 * 1/6 + \ldots + 6 * 1/6 = 3,5$, want de kans op q ogen is $1/6$ voor $q = 1, \ldots, 6$.

Hint. Stel een recurrente betrekking op voor $T(n)$.

Opgave 11. Los de onderstaande recurrente betrekking op **met behulp van een genererende functie.** Als je extra ruimte nodig hebt, ga dan door op de achterkant.

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2 \quad \text{voor } n \geq 2 \text{ met } a_0 = 2 \text{ en } a_1 = 1.$$

Ga indien nodig door op de achterkant.

Restant uitwerking opgave 11.

Formules enz.

Inclusion-Exclusion
Stel dat er in totaal N objecten zijn. Ieder object kan r verschillende eigenschappen, $a_1, \ldots, a_r$, bezitten. Het aantal objecten dat eigenschappen $a_{i_1}, \ldots, a_{i_t}$ bezit (en mogelijk nog andere eigenschappen) wordt genoteerd met $N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$; met $s_t = \sum N(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t})$ wordt aangegeven dat er wordt gesommeerd over iedere combinatie van t ($t = 1, \ldots, r$) verschillende eigenschappen. Verder geeft $N(a'_1, \ldots, a'_r)$ het aantal van de N objecten aan die geen enkele van de r eigenschappen bezitten. Nu geldt

$$N(a'_1, \ldots, a'_r) = N - s_1 + s_2 + \ldots + (-1)^r s_r = N + \sum_{t=1}^{r} (-1)^t s_t$$

Het aantal objecten met precies m eigenschappen is gelijk aan

$$e_m = \sum_{t=0}^{r-m} (-1)^t \binom{m+t}{t} s_{m+t}$$

Binomium
Het uitgebreide binomium van Newton is gedefinieerd als

$$(1+x)^u = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{u}{r} x^r,$$

waarbij

$$\binom{u}{r} = \begin{cases} \frac{u(u-1)\ldots(u-r+1)}{r!} & \text{als } r > 0 \\ 1 & \text{als } r = 0 \end{cases}$$

Toepassing van de regel levert bijv.

$$\frac{1}{(1-x)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+p-1}{p-1} x^k.$$

Het aantal mogelijkheden om n genummerde ballen te verdelen over k onherkenbare dozen is het Stirling getal

$S(n,k)$. Dit is gedefinieerd als

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$