

# SPELTHEORIE

26 juni 2018 , 13.30-16.30

---

- Zet op elk blad dat je inlevert je naam en studentnummer.
  - SCHRIJF LEESBAAR. Onleesbare antwoorden kunnen fout gerekend worden.
  - Als je een onderdeel niet kunt maken, mag je het wel gebruiken in de volgende onderdelen.
  - Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je er aan komt.
- 

## Opgave 1, 25 pt.

Beschouw het bimatrix spel:

$$\begin{array}{cc} & X & Y \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 2, 2 & 0, b \\ a, 0 & 1, 1 \end{pmatrix} & \end{array}, \text{ met } a \in \mathbb{R} \text{ en } b \in \mathbb{R}.$$

- (a) (15 pt) Neem aan dat  $a < 2$  en  $b = 2$ . Bepaal alle Nash evenwichten van dit spel.
- (b) (10 pt) Zij  $\mathbf{p}^* = (1/2, 1/2)$  en  $\mathbf{q}^* = (3/4, 1/4)$ . Bepaal waarden van  $a$  en  $b$  zodanig dat het paar  $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$  een Nash evenwicht vormt.

## Opgave 2, 25 pt.

In het provinciestadje U. is restaurant "Green Eggs & Ham" het enige etablissement dat ontbijt serveert. Snackbar McMagica gaat zich op de ontbijtmarkt storten door ook 's ochtends open te gaan. Er gaan al tijden geruchten dat McMagica er financieel niet sterk voor staat. Nature heeft beslist of McMagica Zwak is of Sterk, beide met kans  $1/2$ . McMagica weet of ze Zwak of Sterk is, maar GE&H weet dat niet (maar kent wel de kansen op Zwak en Sterk). McMagica beslist of ze zich gaat Voorbereiden op de ochtendopening (bijvoorbeeld meer personeel aannemen of de zaak wat opleuken) of Niet. GE&H observeert of McMagica V of N heeft gespeeld en antwoordt met Terugvechten (bijvoorbeeld door de prijzen te verlagen) of Geen actie ondernemen.

Als McMagica zich Niet voorbereidt en GE&H speelt Geen actie, dan levert dat McMagica een payoff van  $+5$  op. Voorbereiden kost McMagica 3 eenheden als ze Zwak is en 1 eenheid als ze Sterk is. Terugvechten door GE&H kost McMagica 2 eenheden, ongeacht haar type.

Als McMagica Zwak is, dan is de payoff voor GE&H gelijk aan  $+1$  als hij terugvecht en  $0$  als hij Geen actie onderneemt. Als McMagica Sterk is, dan is de payoff voor GE&H gelijk aan  $-1$  als hij terugvecht en  $+2$  als hij Geen actie onderneemt.

- (a) (5 pt.) Teken de extensive form van dit spel.
- (b) (10 pt.) Geef de strategic form van dit spel en bepaal alle Nash evenwichten in zuivere strategieën.
- (c) (10 pt.) Bepaal voor elk NE uit (b) of het een Perfect Bayesian evenwicht is en indien dat het geval is, geef de bijbehorende beliefs.

**Opgave 3, 25 pt.**

Beschouw het bimatrix spel

$$\begin{array}{cc} & C & D \\ \begin{array}{c} C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 2, 2 & 0, \alpha \\ \alpha, 0 & 1, 1 \end{pmatrix} \end{array}$$
, met  $\alpha \in \mathbb{R}$  Dit spel wordt oneindig vaak herhaald, waarbij we de gediscoute payoff  $\pi_i$  voor speler  $i = 1, 2$ , definiëren als:

$$\pi_i = (1 - \delta) \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k p_i(k),$$

met  $p_i(k)$  de payoff voor speler  $i$  op tijdstip  $k$ . Hierbij is  $0 < \delta < 1$ .

Definieer de volgende strategieën:

*COPY - C*: Op  $t = 0$ , speel  $C$ . Op  $t = k > 0$ , kopieer de strategie die de andere speler speelde op  $t = k - 1$ .

*COPY - D*: Op  $t = 0$ , speel  $D$ . Op  $t = k > 0$ , kopieer de strategie die de andere speler speelde op  $t = k - 1$ .

- (a) (15 pt.) Neem aan dat  $\alpha > 4$ . Bepaal alle  $0 < \delta < 1$  waarvoor  $(COPY - C, COPY - D)$  een NE is. Hint: het maakt uit of een speler op een even of een oneven tijdstip afwijkt.
- (b) (10 pt.) Bepaal alle waarden van  $\alpha$  zodanig dat er een  $0 < \delta < 1$  is waarvoor  $(COPY - C, COPY - C)$  een NE is.

**Opgave 4, 25 pt.**

Definieer een drie-speler coöperatief TU spel door:  $\nu(S) = 0$  als  $|S| \leq 1$ ,  $\nu(1, 2) = \nu(1, 3) = \nu(1, 2, 3) = 1$  en  $\nu(2, 3) = a$ , met  $0 \leq a \leq 1$ .

- (a) (5 pt.) Bepaal de nucleolus van dit spel.
- (b) (5 pt.) Bepaal de Shapleywaarde van dit spel. Teken twee grafieken in hetzelfde diagram: de hoeveelheid die speler 1 krijgt in de nucleolus en de hoeveelheid die hij krijgt in de Shapleyverdeling, beide als functie van  $0 \leq a \leq 1$ .

Beschouw het volgende coöperatieve TU spel, dat het bovenstaande spel generaliseert voor  $a = 0$ . Zij  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  met  $n \geq 3$  en

$$\phi(S) = \begin{cases} 1 & \text{als } |S| \geq n - 1 \text{ en } 1 \in S \\ 0 & \text{anders} \end{cases} \quad (1)$$

- (c) (5 pt.) Geef een scenario (verhaaltje) dat overeenkomt met bovenstaand spel. Omdat het een TU spel is, worden de payoffs uitgedrukt in geld (de eenheid mag je zelf bedenken, centen, miljoenen euro's, ...). De spelers zijn bedrijven of individuen. Je antwoord wordt beoordeeld op: leesbaarheid, consistentie met de payoff functie, plausibiliteit en originaliteit.
- (d) (10 pt.) Bepaal de nucleolus van bovenstaand spel. Je mag zonder bewijs gebruik maken van het feit dat de nucleolus voldoet aan de volgende symmetrie eigenschap. SYM: stel  $i \in N$  en  $j \in N$ . Als  $\phi(S \cup \{i\}) = \phi(S \cup \{j\})$ , voor elke  $S \subset N$  waarvoor  $i \notin S$  en  $j \notin S$ , dan krijgen  $i$  en  $j$  hetzelfde in de nucleolusverdeling.