Hertentamen Analyse

17 juli 2018, 13:30-16:30

- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- Het aanhalen van een stelling als bewijs van een onderdeel van een opgave is niet voldoende.
- Als je in een bewijs stellingen gebruikt, laat dan ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- Rekenmachine, telefoon, computer, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.

Succes!

1. Laat a, b reële getallen met $a < b$ en $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een monotoon strikt stijgende functie.

(a). Is $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu? Bewijs deze bewering of geef een tegenvoorbeeld.

(b). Laat $f([a, b]) = [c, d]$ met c, d reële getallen en $c < d$. Bewijs dat de functie $f : [a, b] \to [c, d]$ continu is.

(c). Laat $f([a, b]) = [c, d]$ met c, d reële getallen en $c < d$. Bewijs dat de inverse functie $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ bestaat en continu is.

(d). Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu. Bewijs dat er reële getallen c, d met $c < d$ bestaan zo dat $f([a, b]) = [c, d]$.

2. Definieer de rij $(a_n)_{n \geq 0}$ in $\mathbb{R}$ door $a_0 = 1$ en

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \qquad \text{voor } n \geq 0.$$

(a). Bewijs dat voor alle oneven $n \in \mathbb{N}$ geldt $a_{n-1} \leq a_{n+1}$ en $a_n \geq a_{n+2}$.

(b). Bewijs dat de deelrijen $(a_{2k})_{k \geq 0}$ en $(a_{2k+1})_{k \geq 0}$ van de rij $(a_n)_{n \geq 0}$ convergeren.

(c). Bepaal de limieten $\lim_{k \to \infty} a_{2k}$ en $\lim_{k \to \infty} a_{2k+1}$.

(d). Bewijs dat de rij $(a_n)_{n \geq 0}$ convergent is.

3. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en zij $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ een continue functie op het open interval (a, b).

(a). Laat $a = 0$, $b = 1$ en $f(x) = 1/x^2$. Toon aan dat f niet uniform continu is op $(0, 1)$.

(b). Bewijs dat als f uniform continu is op (a, b) dat er dan een continue functie $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd op het gesloten interval $[a, b]$ bestaat zodat $h(x) = f(x)$ voor $a < x < b$.

4. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een begrensde functie. Laat $\underline{S}(f, V)$ de ondersom en $\overline{S}(f, V)$ de bovensom van f zijn bij een verdeling $V = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ van $[a, b]$.

(a). Bewijs zonder gebruik te maken van stellingen dat f Riemann-integreerbaar als voor iedere $\epsilon > 0$ er een verdeling V van $[a, b]$ bestaat zodat

$$\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) < \epsilon.$$

(b). Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een monotoon stijgende functie. Bewijs dat de functie f Riemann-integreerbaar is.

(c). Laat $a = 0$ en $b = 2$ en laat f gegeven zijn door

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ x + 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

Bewijs dat de functie f Riemann-integreerbaar is en bereken $\int_0^2 f(x)\, dx$.

Normering:				
	1(a):5	2(a):10	3(a) 10	4(a):10
	1(b):10	2(b):5	3(b) 10	4(b):10
	1(c):10	2(c):10		4(c):5
	1(d):10	2(d):5		