Speltheorie

25 juni 2019 , 13.30-16.30

- Zet op elk blad dat je inlevert je naam en studentnummer.
- SCHRIJF LEESBAAR. Onleesbare antwoorden kunnen fout gerekend worden.
- Als je een onderdeel niet kunt maken, mag je het wel gebruiken in de volgende onderdelen.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je er aan komt.

Opgave 1, 20 pt.
Beschouw het bimatrix spel:

$$\begin{array}{c} \\ U \\ M \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L & C & R \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,0 & 1,1 & 2,2 \\ 3,1 & 0,0 & 0,1 \\ 1,1 & 0,0 & 1,0 \end{pmatrix} \end{array} .$$

(a) (5 pt) Elimineer alle strikt gedomineerde strategieën

(b) (10 pt) Bepaal alle Nash evenwichten van dit spel.

Opgave 2, 25 pt.
Een automobilist wil zijn auto verkopen. Nature heeft bepaald of deze auto goed is, met kans 1/2, of slecht, ook met kans 1/2. De verkoper weet of zijn auto goed of slecht is. De koper weet dit niet.
De verkoper kan een Garantie aanbieden, of Niet. Nadat de verkoper de garantie heeft afgegeven (of niet), besluit de koper of zij de auto Koopt of Afziet van de koop.
De prijs van de auto is 15k euro. Als de auto goed is, is zijn waarde 20k, als hij slecht is maar 10k. De auto heeft geen waarde voor de verkoper. Als de auto verkocht wordt, dan moet de verkoper 10k aan de koper betalen indien hij een garantie heeft afgegeven en de auto is slecht. De payoffs zijn 0 voor beide spelers als de verkoop niet doorgaat. Als de verkoop wel doorgaat is de payoff voor de verkoper de prijs, eventueel minus de garantiesom die hij moet betalen. Voor de koper is de payoff de waarde van de auto plus een eventuele garantiesom, minus de prijs.

(a) (5 pt.) Teken de extensive form van dit spel.

(b) (10 pt.) Geef de strategic form van dit spel. Definieer eerst duidelijk welke strategieën de spelers hebben en hoe je die noteert. Bepaal alle Nash evenwichten in zuivere strategieën.

(c) (10 pt.) Bepaal voor elk NE uit (b) of het een Perfect Bayesian evenwicht is en indien dat het geval is, geef de bijbehorende beliefs.

Opgave 3, 15 pt.
Beschouw een spel met twee spelers. De strategieruimte van speler 1 is $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ en die van speler 2 is $\{B_1, B_2, \ldots, B_l\}$. Hierbij zijn k en l gehele getallen groter dan 1.
Neem aan dat (A_1, B_1) een Nash evenwicht is van het eenmalig gespeelde spel.
Dit spel wordt oneindig vaak herhaald, waarbij we de gediscounte payoff π_i voor speler $i = 1, 2$, definieren als:

$$\pi_i = (1 - \delta) \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k p_i(k)\,,$$

met $p_i(k)$ de payoff voor speler i op tijdstip k. Hierbij is $0 < \delta < 1$.
Bedenk voor dit herhaalde spel een strategie S_1 voor speler 1 en een strategie S_2 voor speler 2, zodat:

- De uitkomst is de reeks A_1B_1, A_1B_1, $A_1B_1, \ldots$
- Het paar (S_1, S_2) vormt een Nash evenwicht voor een $0 < \delta < 1$.

Opgave 4, 20 pt.
Beschouw de volgende variant van het Ultimatum Game. Speler 1 mag een voorstel doen voor de verdeling van één eenheid van iets waardevols. Zijn strategie is een reëele $m \in [0, 1]$, waarbij zijn keuze m een verdeling $(m, 1 - m)$ impliceert.
Speler 2 kan het voorstel accepteren of verwerpen.
De payoff voor speler 1 is evenredig met hoeveel hij krijgt. Speler 2 heeft ook nog gelijkheidsidealen. Als ze een voorstel (x_1, x_2) krijgt en ze accepteert, dan is haar payoff $x_2 + \alpha(x_2 - x_1)$ met $\alpha > 0$ een constante.
Als speler 2 de verdeling niet accepteert hebben beide spelers een payoff van 0.

(a) (5 pt.) Geef de payoff functies voor beide spelers. Neem aan dat voor speler 1 de payoff voor de hele eenheid gelijk is aan 1.

(b) (10 pt.) Bepaal een subgame perfect evenwicht.

(b) (5 pt.) Neem de limiet $a \to \infty$ en verklaar het antwoord.

Opgave 5, 20 pt.
Definieer een drie-speler coöperatief TU spel door: $\nu(1) = a$, $\nu(2) = 0$, $\nu(3) = 0$, $\nu(1,2) = 2$, $\nu(1,3) = 3$, $\nu(2,3) = 4$ en $\nu(1,2,3) = 5$. Hierbij is $a \in \mathbb{R}$.

(a) (5 pt.) Bepaal de waarden van a waarvoor de kern van dit spel leeg is.

(b) (5 pt.) Bepaal de Shapleywaarde van dit spel.

(c) (10 pt) Neem $a = 0$ en bepaal de nucleolus.