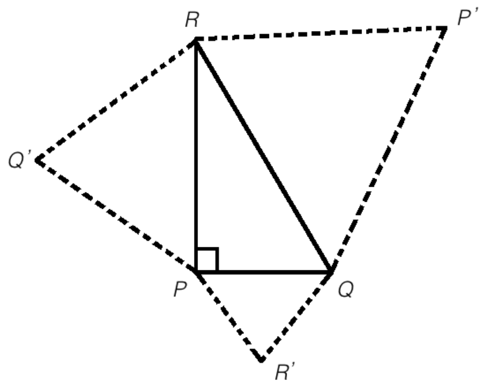

Tentamen: Inleiding meetkunde 2018/2019

Je mag gebruik maken van resultaten uit het boek/de colleges, mits je dit vermeldt en tenzij we je vragen ze opnieuw te bewijzen. Resultaten uit de opgaven van het boek/de werkcolleges moeten opnieuw bewezen worden. Je mag resultaten uit eerdere onderdelen gebruiken zonder die te hebben bewezen. *Begin iedere opgave op een nieuw vel!*

Opgave 1.

(a) **1 punt** Beschouw een driehoek Δ op $\mathbb{E}^2$, S^2, $\mathcal{H}^2$ (in het geval van S^2 nemen we aan dat de driehoek strikt is, we nemen ook aan dat de hoekpunten niet collinear zijn). Wat is het maximale aantal rechte hoeken dat Δ kan hebben in elk van deze drie gevallen? Bewijs je antwoord.

(b) **1 punt** Beschouw de puntspiegeling $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $(x, y, z, w) \mapsto (-x, -y, -z, -w)$. Vind twee draaiingen $T_1, T_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ zodanig dat $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1 = S$.

(c) **1 punt** Beschouw een driehoek ΔPQR op $\mathcal{H}^2$ met $P = (1, 0, 0)$, $Q = (t, x, y)$, $R = (t', x', y')$ en $\angle P = \frac{\pi}{2}$. Bewijs dat $\cosh d(Q, R) = tt'$.

Opgave 2.

(a) **1 punt** Geef de dimensieformule voor projectief-lineaire deelruimten.

(b) **1 punt** Beschouw drie onderling verschillende lijnen L, M, N in $\mathbb{P}^4$ die niet in een hypervlak liggen. Laat door middel van een voorbeeld zien dat er meerdere lijnen kunnen zijn die L, M en N snijden.

(c) **1.5 punt** Neem nu aan dat L, M, N in $\mathbb{P}^4$ lijnen zijn die niet in een hypervlak liggen *en* dat elk tweetal van deze lijnen elkaar niet snijdt. Bereken $\dim(\langle L, M\rangle \cap N)$ en bewijs je antwoord.

Opgave 3. Beschouw een driehoek ΔPQR zodanig dat $|PQ| = 1$, $|PR| = \sqrt{3}$ en $\angle P = \frac{\pi}{2}$. Vorm *gelijkzijdige driehoeken* $\Delta P'QR$, $\Delta PQ'R$ en $\Delta PQR'$ op de zijden van ΔPQR zoals in bovenstaand figuur.

(a) **1 punt** Kies coördinaten zodanig dat PQ op de positieve x-as ligt en PR op de positieve y-as. Laat zien dat $R' = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$ en $Q' = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$.

(b) **1 punt** Bewijs het volgende: (1) $(\sqrt{3}, 1)$ staat loodrecht op zijde QR, (2) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ is het midden van zijde QR, (3) $P' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}) + \alpha \cdot (\sqrt{3}, 1)$ voor $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

(c) **1.5 punt** Bewijs door gebruik te maken van coördinaten dat PP', QQ' en RR' elkaar snijden in een punt en vind coördinaten voor dit punt.[1]

[1] F (het Fermat-punt) is het unieke punt in ΔPQR met $|FP| + |FQ| + |FR|$ minimaal (geen opgave).

Opgave 1. (a) Voor $\mathbb{E}^2$ voldoen de hoeken $a, b, c > 0$ aan de formule $a + b + c = \pi$. Dus maximaal één hoek kan gelijk zijn aan $\pi/2$ en dit komt inderdaad voor. Voor S^2 bestaat een driehoek met drie rechte hoeken: snij S^2 met het xy-, xz-, yz-vlak en beschouw de driehoek met $x, y, z \geq 0$. Omdat deze vlakken allemaal loodrecht op elkaar staan, zijn alle hoeken $\pi/2$. Voor $\mathcal{H}^2$ voldoen de hoeken $a, b, c > 0$ aan de formule $a+b+c = \pi - \text{oppervlakte}\,\Delta$. Dus kan opnieuw maximaal één hoek gelijk zijn aan $\pi/2$ en dit komt inderdaad voor. (b) Zij T_1 de diagonaalmatrix $\operatorname{diag}(-1, -1, 1, 1)$. Dit is draaiing rond het zw-vlak over hoek π. Zij T_2 de diagonaalmatrix $\operatorname{diag}(1, 1, -1, -1)$. Dit is draaiing rond het xy-vlak over hoek π. Dan $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1 = \operatorname{diag}(-1, -1, -1, -1) = S$. (c) Zij $\alpha = d(Q, R)$, $\beta = d(P, Q)$, $\gamma = d(P, R)$ en $a = \frac{\pi}{2}$ de diëderhoek te P. Dan $\cosh\alpha = \cosh\beta\cosh\gamma - \sinh\beta\sinh\gamma\cos a = \cosh\beta\cosh\gamma$. Zij $p, q, r \in \mathbb{R}^3$ de vectoren die corresponderen met P, Q, R. Dan $\cosh\beta = -p \cdot_L q = t$ en $\cosh\gamma = -p \cdot_L r = t'$. Dus $\cosh d(Q, R) = tt'$.

Opgave 2. (a) Stel $L, M \subset \mathbb{P}^n$ zijn projectief-lineaire deelruimten. Dan $\dim\langle L, M\rangle = \dim L + \dim M - \dim L \cap M$. (b) Kies 2-dimensionale lineaire deelruimte $L', M' \subset \mathbb{R}^5$ waarbij $L' \cap M'$ 1-dimensionaal en dus $L' + M'$ 3-dimensionaal is (dimensieformule). Kies $N' \subset \mathbb{R}^5$ een 2-dimensionale lineaire deelruimte met $(L' + M') \cap N' = \{0\}$. Dan $(L' + M') + N' = \mathbb{R}^5$ (dimensieformule) en liggen de bijbehorende lijnen $L, M, N \subset \mathbb{P}^4$ niet in een hypervlak. Voor iedere $P \in N$ kunnen we nu de lijn door P en het snijpunt van L, M trekken. Een voorbeeld in coördinaten mag ook. (c) Zij $L', M', N' \subset \mathbb{R}^5$ de 2-dimensionale lineaire deelruimten die corresponderen met L, M, N. Dan is de doorsnede van ieder tweetal $\{0\}$ want de bijbehorende lijnen zijn disjunct. Dus is $L' + M'$ 4-dimensionaal (dimensieformule). We weten dat $(L' + M') + N'$ dimensie 5 heeft want L, M, N liggen niet in een hypervlak en dus heeft $(L'+M') \cap N'$ dimensie 1 (dimensieformule). Omdat $\langle L, M\rangle = \mathbb{P}(L' + M')$, $N = \mathbb{P}(N')$ en $\langle L, M\rangle \cap N = \mathbb{P}((L' + M') \cap N')$, heeft dit dimensie 0.

Opgave 3. (a) De hoogte van een gelijkzijdige driehoek met zijde λ is $\sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}\lambda^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\lambda$ (Pythagoras, teken een plaatje). Voor $\lambda = 1$ geeft dit $R' = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$. Voor $\lambda = \sqrt{3}$ geeft dit $Q' = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$. (b) Merk op $\vec{RQ} = (1, -\sqrt{3})$, dus $(\sqrt{3}, 1) \cdot \vec{RQ} = 0$ en $(\sqrt{3}, 1)$ staat loodrecht op RQ. Het midden M van RQ is $\frac{1}{2} \cdot (1, 0) + \frac{1}{2} \cdot (0, \sqrt{3}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$. Derhalve is $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}) + \alpha \cdot (\sqrt{3}, 1)$ de lijn door M loodrecht op RQ. Voorts $|RQ| = \sqrt{3 + 1} = 2$ (Pythagoras). We zoeken dus α zodanig dat $|MP'| = \sqrt{3\alpha^2 + \alpha^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 2$ (onderdeel (a) met $\lambda = 2$) en dus $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. (c) Stel vergelijkingen op voor de lijnen PP', QQ' en RR'. Dus PP' wordt gegeven door $r \cdot ((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}) + \alpha \cdot (\sqrt{3}, 1)) = (2r, \sqrt{3}r)$. En QQ' door $(1, 0) + s \cdot (-\frac{3}{2} - 1, \frac{1}{2}\sqrt{3}) = (1 - \frac{5}{2}s, \frac{1}{2}\sqrt{3}s)$. En RR' door $(0, \sqrt{3}) + t \cdot (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \sqrt{3}) = (\frac{1}{2}t, \sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3}t)$. De claim is dat $2r = 1 - \frac{5}{2}s = \frac{1}{2}t$ en $\sqrt{3}r = \frac{1}{2}\sqrt{3}s = \sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3}t$ een oplossing heeft. Inderdaad: $r = \frac{1}{7}$, $s = \frac{2}{7}$ en $t = \frac{4}{7}$ en het snijpunt is $(\frac{2}{7}, \frac{\sqrt{3}}{7})$.