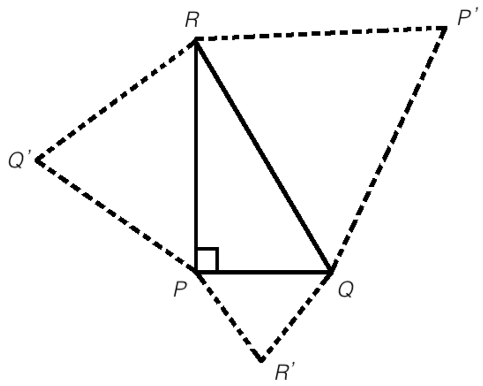

Tentamen: Inleiding meetkunde 2018/2019

Je mag gebruik maken van resultaten uit het boek/de colleges, mits je dit vermeldt en tenzij we je vragen ze opnieuw te bewijzen. Resultaten uit de opgaven van het boek/de werkcolleges moeten opnieuw bewezen worden. Je mag resultaten uit eerdere onderdelen gebruiken zonder die te hebben bewezen. *Begin iedere opgave op een nieuw vel!*

Opgave 1.

(a) **1 punt** Beschouw een driehoek Δ op $\mathbb{E}^2$, S^2, $\mathcal{H}^2$ (in het geval van S^2 nemen we aan dat de driehoek strikt is, we nemen ook aan dat de hoekpunten niet collinear zijn). Wat is het maximale aantal rechte hoeken dat Δ kan hebben in elk van deze drie gevallen? Bewijs je antwoord.

(b) **1 punt** Beschouw de puntspiegeling $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $(x, y, z, w) \mapsto (-x, -y, -z, -w)$. Vind twee draaiingen $T_1, T_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ zodanig dat $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1 = S$.

(c) **1 punt** Beschouw een driehoek ΔPQR op $\mathcal{H}^2$ met $P = (1, 0, 0)$, $Q = (t, x, y)$, $R = (t', x', y')$ en $\angle P = \frac{\pi}{2}$. Bewijs dat $\cosh d(Q, R) = tt'$.

Opgave 2.

(a) **1 punt** Geef de dimensieformule voor projectief-lineaire deelruimten.

(b) **1 punt** Beschouw drie onderling verschillende lijnen L, M, N in $\mathbb{P}^4$ die niet in een hypervlak liggen. Laat door middel van een voorbeeld zien dat er meerdere lijnen kunnen zijn die L, M en N snijden.

(c) **1.5 punt** Neem nu aan dat L, M, N in $\mathbb{P}^4$ lijnen zijn die niet in een hypervlak liggen *en* dat elk tweetal van deze lijnen elkaar niet snijdt. Bereken $\dim(\langle L, M\rangle \cap N)$ en bewijs je antwoord.

Opgave 3. Beschouw een driehoek ΔPQR zodanig dat $|PQ| = 1$, $|PR| = \sqrt{3}$ en $\angle P = \frac{\pi}{2}$. Vorm *gelijkzijdige driehoeken* $\Delta P'QR$, $\Delta PQ'R$ en $\Delta PQR'$ op de zijden van ΔPQR zoals in bovenstaand figuur.

(a) **1 punt** Kies coördinaten zodanig dat PQ op de positieve x-as ligt en PR op de positieve y-as. Laat zien dat $R' = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$ en $Q' = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$.

(b) **1 punt** Bewijs het volgende: (1) $(\sqrt{3}, 1)$ staat loodrecht op zijde QR, (2) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ is het midden van zijde QR, (3) $P' = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}) + \alpha \cdot (\sqrt{3}, 1)$ voor $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

(c) **1.5 punt** Bewijs door gebruik te maken van coördinaten dat PP', QQ' en RR' elkaar snijden in een punt en vind coördinaten voor dit punt.[1]

[1] F (het Fermat-punt) is het unieke punt in ΔPQR met $|FP| + |FQ| + |FR|$ minimaal (geen opgave).