Hertentamen: Inleiding meetkunde 2018/2019

Je mag gebruik maken van resultaten uit het boek/de colleges, mits je dit vermeldt en tenzij we je vragen ze opnieuw te bewijzen. Resultaten uit de opgaven van het boek/de werkcolleges moeten opnieuw bewezen worden. Je mag resultaten uit eerdere onderdelen gebruiken zonder die te hebben bewezen.

Opgave 1.

(a) **1 punt** Schrijf de translatie $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$ in $\mathbb{E}^2$ als de samenstelling van twee lijnspiegelingen in $\mathbb{E}^2$.

(b) **1 punt** Gegeven een driehoek ΔPQR in $\mathbb{E}^2$. Bewijs dat de bissectricen van de hoeken $\angle P, \angle Q, \angle R$ elkaar snijden in een punt O *Hint: De bissectrice van hoek $\angle P$ is de lijn door P die de hoek in tweeën deelt. Gebuik het volgende feit over deze bissectrice: het zijn precies de punten met gelijke afstand tot de lijn door P, Q en de lijn door P, R.*

(c) **1 punt** Bewijs dat er geen isometrie van S^2 naar $\mathbb{E}^2$ bestaat. *Hint: Vind vier verschillende punten $N, P, Q, Z \in S^2$ met $d(N, P) = d(P, Z) = d(N, Q) = d(Q, Z) = \frac{\pi}{2}$ en $d(N, Z) = \pi$. Wat gebeurt er na toepassing van een isometrie $S^2 \to \mathbb{E}^2$?*

Opgave 2.

(a) **1 punt** Stel $E, F \subseteq \mathbb{A}^n$ zijn twee affien-lineaire deelruimten zodanig dat $E \cap F \neq \varnothing$. Geef de dimensieformule voor $\dim E \cap F$, d.w.z. een formule voor $\dim E \cap F$ in termen van $\dim E$, $\dim F$ en $\dim\langle E, F\rangle$. Je hoeft de formule niet te bewijzen.

(b) **1 punt** Stel we definiëren $\dim \varnothing = -1$. Is de hypothese $E \cap F \neq \varnothing$ in onderdeel (a) noodzakelijk? Bewijs je antwoord.

(c) **1 punt** Beschouw de punten $P = (\sqrt{3}, 0, -\sqrt{2})$ en $Q = (\sqrt{3}, 0, \sqrt{2})$ in $\mathcal{H}^2$. Vind een Lorentz-matrix zodanig dat ten opzichte van de nieuwe coördinaten bepaald door deze matrix het punt P gegeven wordt door $(1, 0, 0)$ en het punt Q door $(\cosh\alpha, \sinh\alpha, 0)$ en bepaal de hyperbolische afstand α tussen P, Q. *Hint: Gebruik het "hyperbolisch Gram-Schmidt-procédé". Je mag gebruiken dat in het boek/de colleges bewezen is dat dit de punten P, Q in de gewenste vorm zet.*

Opgave 3. Gegeven twee verschillende punten P, Q in $\mathbb{P}^2$. Zij L, M, N drie verschillende lijnen door P en L', M', N' drie verschillende lijnen door Q. We nemen aan dat de lijnen L, M, N, L', M', N' alle ongelijk zijn aan de lijn door P, Q. Zij A de lijn door $L \cap M'$ en $L' \cap M$. Zij B de lijn door $L \cap N'$ en $L' \cap N$. Zij C de lijn door $M \cap N'$ en $M' \cap N$. In deze opgave gaan we bewijzen dat de lijnen A, B, C door één punt gaan.

(a) **1 punt** Beredeneer dat er homogene coördinaten $(x : y : z)$ bestaan zodanig dat $P = (1 : 0 : 0)$, $Q = (0 : 1 : 0)$, $M \cap L' = (0 : 0 : 1)$, $L \cap M' = (1 : 1 : 1)$.

(b) **1 punt** Bewijs de dat de lijnen L, M, N, L', M', N' gegeven worden door de volgende vergelijkingen. $L : y = z$, $L' : x = 0$, $M : y = 0$, $M' : x = z$, $N : \beta y + z = 0$ met $\beta \neq -1$ en $N' : ax + z = 0$ met $a \neq -1$.

(c) **1 punt** Bewijs dat A, B, C gegeven worden door de volgende vergelijkingen. $A : x = y$, $B : a(\beta + 1)x + \beta y + z = 0$ en $C : ax + \beta(a + 1)y + z = 0$.

(d) **1 punt** Bewijs dat A, B, C door één punt gaan.

Opgave 1. (a) Beschouw de spiegelingen S_1, S_2 in de lijnen $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$. Namelijk $S_1 : (x, y) \mapsto (-x, y)$ en $S_2 : (x, y) \mapsto (-(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}, y)$. Dan zien we dat $S_2 \circ S_1$ gelijk is aan $(x, y) \mapsto (x + 1, y)$. (b) Zij L, M de bissectricen van $\angle P, \angle Q$. Beschouw het punt $O := L \cap M$. De hint impliceert dat dit punt gelijke afstand heeft tot zijde PQ en zijde PR, alsmede zijde QR. Derhalve heeft O gelijke afstand tot zijden PR en QR en ligt dus (opnieuw vanwege de hint) op de bissectrice van $\angle R$. (c) Stel een isometrie $\phi : S^2 \to \mathbb{E}^2$ bestaat. Kies $N = (0, 0, 1), P = (1, 0, 0), Q = (0, 1, 0), Z = (0, 0, -1) \in S^2$. Dan $N, P, Q, Z \in S^2$ en $d(N, P) = d(N, Q) = d(Z, P) = d(Z, Q) = \frac{\pi}{2}$ en $d(N, Z) = \pi$. Derhalve zijn $N' = \phi(N)$, $P' = \phi(P)$, $Q' = \phi(Q)$, $Z' = \phi(Z)$ (verschillende) punten in $\mathbb{E}^2$ met de eigenschap dat $d(N', P') = d(P', Z') = \frac{\pi}{2}$, $d(N', Q') = d(Q', Z') = \frac{\pi}{2}$ en $d(N', Z') = \pi$. De driehoeksongelijkheid op $\mathbb{E}^2$ impliceert dat het drietal N', P', Z' op een lijn ligt en zo ook voor N', Q', Z'. Er gaat maar één lijn door N', Z' en dus liggen N', Z', P', Q' alle op een lijn. Derhalve $P' = Q'$ omdat ze beide afstand $\frac{\pi}{2}$ tot zowel N' als Z' hebben. Maar $P \neq Q$ en ϕ is een bijectie; tegenspraak.

Opgave 2. (a) Gegeven affien-lineaire deelruimten $E, F \subseteq \mathbb{A}^n$ zodanig dat $E \cap F \neq \varnothing$. Dan $\dim E \cap F = \dim E + \dim F - \dim\langle E, F\rangle$. (b) De voorwaarde $E \cap F \neq \varnothing$ is noodzakelijk. Voorbeeld: beschouw twee verschillende parallelle lijnen $E, F \subseteq \mathbb{A}^2$. Dan $\dim E = \dim F = 1$ en $\dim\langle E, F\rangle = 2$, maar $\dim E \cap F = -1$ (definitie). (c) We voeren het hyperbolisch Gram-Schmidt procédé uit (college). We weten dat dit P, Q in de gewenste vorm zet. Stel p, q zijn de vectoren die corresponderen met P, Q. Dan $\cosh\alpha = -p \cdot_L q = -(-3 - 2) = 5$. Dit bepaalt α. Definieer $f_0 = p$, $v := q + (q \cdot_L f_0) f_0 = (-4\sqrt{3}, 0, 6\sqrt{2})$, $f_1 := \frac{1}{\sqrt{24}}(-4\sqrt{3}, 0, 6\sqrt{2}) = (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{3})$. De vector $(0, 1, 0)$ zit niet in de span van f_0, f_1, heeft Lorentz-lengte 1 en staat loodrecht op f_0, f_1. De gewenste matrix is $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$.

Opgave 3. (a) Ten eerste zijn $P, Q, M \cap L', L \cap M'$ onderling verschillend. Immers als, zonder beperking van algemeenheid $P = M \cap L'$, dan is L' gelijk aan de lijn PQ (tegenspraak). Voorts is ieder drietal niet collinear. Geval 1: stel, zonder beperking van algemeenheid, $P, Q, M \cap L'$ zijn collinear. Dan $L' = M = PQ$ (tegenspraak). Geval 2: stel, zonder beperking van algemeenheid, $P, M \cap L', M' \cap L$ zijn collinear. Dan $L = M$ (tegenspraak). Derhalve vormen $P, Q, M \cap L', L \cap M'$ een projectief stelsel en de gewenste coördinaten bestaan vanwege een resultaat uit het boek. (b) De punten $P = (1 : 0 : 0), L \cap M' = (1 : 1 : 1)$ liggen op L en voldoen aan de vergelijking $y = z$. De punten $Q = (0 : 1 : 0), M \cap L' = (0 : 0 : 1)$ liggen op L' en voldoen aan de vergelijking $x = 0$. De punten $P = (1 : 0 : 0), M \cap L' = (0 : 0 : 1)$ liggen op M en voldoen aan de vergelijking $y = 0$. De punten $Q = (0 : 1 : 0), L \cap M' = (1 : 1 : 1)$ liggen op M' en voldoen aan de vergelijking $x = z$. De lijn N is van de vorm $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ met α, β, γ niet alle 0. Voorts $\alpha = 0$ want N gaat door P en $\gamma \neq 0$ want anders $N = M$. We mogen dus $\gamma = 1$ nemen. Voorts $\gamma \neq -1$ want anders $N = L$. De lijn N' is van de vorm $ax + by + cz = 0$ met a, b, c niet alle 0. Voorts $b = 0$ want N' gaat door Q en $c \neq 0$ want anders $N' = L'$. We mogen dus $c = 1$ nemen. Voorts $a \neq -1$ want anders $N' = M'$. (c) Uit (a) volgt: $L \cap M' = (1 : 1 : 1)$ en $M \cap L' = (0 : 0 : 1)$ en dus wordt A, de lijn door deze twee punten, gegeven door $x = y$. Uit (b) volgt $L \cap N' = (-1 : a : a)$ en $N \cap L' = (0 : -1 : \beta)$. Dus de lijn B door deze punten is $a(\beta + 1)x + \beta y + z = 0$. Voorts $M \cap N' = (-1 : 0 : a)$ en $N \cap M' = (\beta : -1 : \beta)$ dus de lijn C door deze punten is $ax + \beta(a + 1)y + z = 0$. (d) Invullen geeft dat $(1 : 1 : -a\beta - a - \beta)$ op A, B, C ligt.