Hertentamen: Inleiding meetkunde 2018/2019

Je mag gebruik maken van resultaten uit het boek/de colleges, mits je dit vermeldt en tenzij we je vragen ze opnieuw te bewijzen. Resultaten uit de opgaven van het boek/de werkcolleges moeten opnieuw bewezen worden. Je mag resultaten uit eerdere onderdelen gebruiken zonder die te hebben bewezen.

Opgave 1.

(a) **1 punt** Schrijf de translatie $(x, y) \mapsto (x+1, y)$ in $\mathbb{E}^2$ als de samenstelling van twee lijnspiegelingen in $\mathbb{E}^2$.

(b) **1 punt** Gegeven een driehoek ΔPQR in $\mathbb{E}^2$. Bewijs dat de bissectricen van de hoeken $\angle P, \angle Q, \angle R$ elkaar snijden in een punt O *Hint: De bissectrice van hoek $\angle P$ is de lijn door P die de hoek in tweeën deelt. Gebuik het volgende feit over deze bissectrice: het zijn precies de punten met gelijke afstand tot de lijn door P, Q en de lijn door P, R.*

(c) **1 punt** Bewijs dat er geen isometrie van S^2 naar $\mathbb{E}^2$ bestaat. *Hint: Vind vier verschillende punten $N, P, Q, Z \in S^2$ met $d(N,P) = d(P,Z) = d(N,Q) = d(Q,Z) = \frac{\pi}{2}$ en $d(N,Z) = \pi$. Wat gebeurt er na toepassing van een isometrie $S^2 \to \mathbb{E}^2$?*

Opgave 2.

(a) **1 punt** Stel $E, F \subseteq \mathbb{A}^n$ zijn twee affien-lineaire deelruimten zodanig dat $E \cap F \neq \varnothing$. Geef de dimensieformule voor $\dim E \cap F$, d.w.z. een formule voor $\dim E \cap F$ in termen van $\dim E$, $\dim F$ en $\dim\langle E, F\rangle$. Je hoeft de formule niet te bewijzen.

(b) **1 punt** Stel we definiëren $\dim \varnothing = -1$. Is de hypothese $E \cap F \neq \varnothing$ in onderdeel (a) noodzakelijk? Bewijs je antwoord.

(c) **1 punt** Beschouw de punten $P = (\sqrt{3}, 0, -\sqrt{2})$ en $Q = (\sqrt{3}, 0, \sqrt{2})$ in $\mathcal{H}^2$. Vind een Lorentz-matrix zodanig dat ten opzichte van de nieuwe coördinaten bepaald door deze matrix het punt P gegeven wordt door $(1,0,0)$ en het punt Q door $(\cosh\alpha, \sinh\alpha, 0)$ en bepaal de hyperbolische afstand α tussen P, Q. *Hint: Gebruik het "hyperbolisch Gram-Schmidt-procédé". Je mag gebruiken dat in het boek/de colleges bewezen is dat dit de punten P, Q in de gewenste vorm zet.*

Opgave 3. Gegeven twee verschillende punten P, Q in $\mathbb{P}^2$. Zij L, M, N drie verschillende lijnen door P en L', M', N' drie verschillende lijnen door Q. We nemen aan dat de lijnen L, M, N, L', M', N' alle ongelijk zijn aan de lijn door P, Q. Zij A de lijn door $L \cap M'$ en $L' \cap M$. Zij B de lijn door $L \cap N'$ en $L' \cap N$. Zij C de lijn door $M \cap N'$ en $M' \cap N$. In deze opgave gaan we bewijzen dat de lijnen A, B, C door één punt gaan.

(a) **1 punt** Beredeneer dat er homogene coördinaten $(x : y : z)$ bestaan zodanig dat $P = (1:0:0)$, $Q = (0:1:0)$, $M \cap L' = (0:0:1)$, $L \cap M' = (1:1:1)$.

(b) **1 punt** Bewijs de dat de lijnen L, M, N, L', M', N' gegeven worden door de volgende vergelijkingen. $L : y = z$, $L' : x = 0$, $M : y = 0$, $M' : x = z$, $N : \beta y + z = 0$ met $\beta \neq -1$ en $N' : ax + z = 0$ met $a \neq -1$.

(c) **1 punt** Bewijs dat A, B, C gegeven worden door de volgende vergelijkingen. $A : x = y$, $B : a(\beta+1)x + \beta y + z = 0$ en $C : ax + \beta(a+1)y + z = 0$.

(d) **1 punt** Bewijs dat A, B, C door één punt gaan.