Analyse

25 juni 2019, 13:30-16:30

- Maak iedere opgave op een apart blad en schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, ga dan toch door met de volgende onderdelen. Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, telefoon, computer, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.

Succes!

1. Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een naar boven begrensde rij in $\mathbb{R}$. Laat $s := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ en neem aan dat $a_n < s$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

(a). Bewijs dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een monotoon strikt stijgende deelrij heeft.

(b). Toon aan dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een convergente deelrij heeft.

2. Laat $f : [0, 1] \to [0, 1]$ een strikt monotoon stijgende continue functie.

(a). Bewijs dat er een $c \in [0, 1]$ bestaat zo dat $f(c) = c$.

(b). Laat $a_0 \in [0, 1]$ en definieer $a_{n+1} = f(a_n)$ voor $n = 0, 1, 2, \ldots$. Bewijs dat de rij $(a_n)_{n\geq 0}$ convergeert.

(c). Bewijs dat de rij $(a_n)_{n\geq 0}$ naar een $c \in [0, 1]$ met $f(c) = c$ convergeert.

Z.O.Z.

3. Beschouw de verzameling van begrensde functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Met de puntsgewijze optelling en scalarvermenigvuldiging is V een reële lineaire ruimte.

(a). Toon aan dat voor iedere $f \in V$ het getal

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \mid x \in \mathbb{R}\}$$

bestaat.

(b). Toon aan dat $\|\cdot\|$ voldoet aan de driehoeksongelijkheid.

Beschouw V voorzien van de norm

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \mid x \in \mathbb{R}\}$$

en laat

$$B := \{f \in V \mid \|f\| \leq 1\}.$$

(c). Laat zien dat B een gesloten en begrensde verzameling van V is.

(d). Definieer de rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in B door $f_n(x) = 1$ voor $x \in [2n, 2n+1]$, $f_n(x) = 1$ voor $x \in [-(2n+1), -2n]$ en $f_n(x) = 0$ voor $x \notin [2n, 2n+1] \cup [-(2n+1), -2n]$ voor $n \in \mathbb{N}$. Bewijs dat de rij $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geen convergente deelrij in B heeft en concludeer dat B niet rij-compact is.

4. Laat $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een niet-negatieve begrensde functie die niet identiek nul is.

(a). Bewijs dat als f bovendien continu is dat dan f integreerbaar is met $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

(b). Geldt voor alle integreerbare niet-negatieve functies f (niet per se continu) die niet identiek nul zijn dat $\int_a^b f(x)\,dx > 0$? Bewijs dat dit geldt of construeer een tegenvoorbeeld.

(c). Neem aan dat $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu zijn met g strikt positief. Bewijs dat er een $c \in [a, b]$ bestaat zodat

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c) \int_a^b g(x)\,dx.$$

Is de conditie dat g strikt positief is noodzakelijk?

Normering:	1(a):10	2(a):10	3(a):5	4(a): 10
	1(b):10	2(b):10	3(b):5	4(b): 10
		2(c):5	3(c):5	4(c): 10
			3(d):10	