Herkansing Analyse

16 juli 2019, 13:30-16:30

– Maak iedere opgave op een apart blad en schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.

– Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.

– Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.

– Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, ga dan toch door met de volgende onderdelen. Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.

– Rekenmachine, telefoon, computer, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.

Succes!

1. Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in $\mathbb{R}$ zodat $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

(a). Bewijs dat de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een monotoon strikt stijgende deelrij heeft.

(b). Laat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodat $\sup_{x>0} |f(x)| < \infty$. Bewijs dat de rij $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ een convergente deelrij heeft.

2. Laat a, b reële getallen met $a < b$ en $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een monotoon strikt stijgende functie.

(a). Is $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu? Bewijs deze bewering of geef een tegenvoorbeeld.

(b). Laat $f([a, b]) = [c, d]$ met c, d reële getallen en $c < d$. Bewijs dat de functie $f : [a, b] \to [c, d]$ continu is.

(c). Laat $f([a, b]) = [c, d]$ met c, d reële getallen en $c < d$. Bewijs zonder gebruik te maken van stellingen dat de inverse functie $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ bestaat en continu is.

3. Zij $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ een continue functie.

(a). Laat $f(x) = x^2$ en $N \in \mathbb{N}$. Bewijs dat f uniform continu is op $(0, N]$.

(a). Laat $f(x) = x^2$. Bewijs dat f niet uniform continu is op $(0, \infty)$.

(c). Neem aan dat $\lim_{x \to \infty} f(x)$ bestaat. Bewijs dat f uniform continu is op $[\epsilon, \infty)$ voor iedere $\epsilon > 0$.

4. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een gegeven functie.

(a). Laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een monotoon stijgende functie. Bewijs dat f Riemann integreerbaar is.

(b). Laat $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

Bewijs dat de functie f Riemann-integreerbaar is en bereken $\int_0^2 f(x)\,dx$.

Normering:

1(a):10	2(a):10	3(a):10	4(a): 10
1(b):10	2(b):10	3(b):10	4(b): 10
	2(c):10	3(c):10	