Tussentoets Analyse

woensdag 29 mei 2019, 17:00-19:00

- Schrijf op ieder vel je naam en bovendien op het eerste vel je studentnummer, de naam van de werkgroepleider Jan Willem van Ittersum (groep 1), Jetze Zoethout (groep 2), Thomas Bakx (groep 3) of Lasse Grimmelt (groep 4 en 5) en het aantal ingeleverde vellen.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, ga dan toch door met de volgende onderdelen. Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, telefoon, computer, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.

Succes!

1. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ functies met domeinen $D(f) = \mathbb{R}$ en $D(g) = \mathbb{R}$.

(a). Zij f continu in 0 en zij g gedefinieerd door $g(x) = xf(x)$ voor $x \in \mathbb{R}$. Bewijs dat g differentieerbaar is in 0 en bepaal $g'(0)$.

(b). Zij f begrensd en zij g gedefinieerd door $g(x) = x^2 f(x)$ voor $x \in \mathbb{R}$. Bewijs dat g differentieerbaar is in 0 en bepaal $g'(0)$.

(c). Bewijs zonder gebruik te maken van stellingen dat g differentieerbaar in 0 en $g(0) = 0$ dan en slechts dan als er een functie f bestaat die continu is in 0 met $g(x) = xf(x)$ voor $x \in \mathbb{R}$.

2. Laat $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $a < b$ en $c < d$. Veronderstel dat $f : [a, b] \to [c, d]$ een continue bijectieve functie is met $f(a) < f(b)$.

(a). Bewijs dat f strikt monotoon stijgend is.

(b). Bewijs dat de inverse functie $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$ bestaat en continu is.

3. Laat $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ een continue functie. Voor $c \in \mathbb{R}^m$ is de verzameling $f^{-1}(c)$ gedefinieerd door

$$f^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = c\}.$$

(a). Zij D_k voor $k = 1, 2, \dots$ een gesloten verzameling. Bewijs dat de doorsnede $\cap_{k\geq 1} D_k$ weer gesloten is.

(b). Bewijs direct zonder gebruik te maken van stellingen dat $f^{-1}(c)$ een gesloten deel van $\mathbb{R}^n$ is.

(c). Laat de deelverzameling D van $\mathbb{R}^3$ gedefinieerd zijn door

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ en } x + y + z = 2\}.$$

Toon aan dat D gesloten is.

4. De rij $(a_n)_{n\geq 1}$ wordt gegeven door

$$a_1 = 7 \quad en \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 3}{2(a_n - 1)}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(a). Bewijs dat $a_n > a_{n+1} > 3$ voor alle $n \geq 1$.

(b). Bewijs dat de rij $(a_n)_{n\geq 1}$ convergeert en bepaal de limiet.

Normering:				
	1(a):7	2(a):13	3(a):7	4(a):13
	1(b):8	2(b):12	3(b):13	4(b):12
	1(c):10		3(c):5	