

Tentamen Numerieke Wiskunde

dinsdag, 6 november 2012, 9.00 –12.00

1. Zet op ieder vel dat je inlevert je naam en op het eerste vel bovendien nog je studierichting en studentnummer.
2. Je mag het dictaat gebruiken, de uitwerkingen van de opgaven echter niet. Als je een resultaat uit het dictaat gebruikt geef dan duidelijk aan welk resultaat (nummer, pagina, etc.). Resultaten uit een vorig onderdeel mag je gebruiken ook al lukte het je niet om dat onderdeel te bewijzen.
3. Geef bij het beantwoorden van de vragen een duidelijke argumentatie (ook als dat niet expliciet gevraagd wordt).
4. $f \equiv g$ betekent ‘ f is *per definitie* gelijk aan g ’.
5. Succes.

1. Voor $f \in C([-1, 1])$ benaderen we $I(f) \equiv \int_{-1}^1 f(t) dt$ met de kwadratuur formule

$$Q(f) = w_0 f(-\alpha) + w_1 f(0) + w_0 f(\alpha). \quad (1)$$

We willen w_0, w_1 en α zo kiezen dat Q alle polynomen p van graad $< k$ met k maximaal exact integreert, d.w.z. $I(p) = Q(p)$.

(a) Als p *oneven* is, dan geldt $I(p) = Q(p) = 0$. Dit hoef je niet te bewijzen. Je kunt ook bewijzen,¹ maar dat hoef je ook niet te doen, dat het voldoende is om

$$\int_0^1 p(t) dt = w_1 p(0) + 2w_0 p(\alpha) \quad (2)$$

exact te hebben voor *even* polynomen p van zo hoog mogelijke graad.

Bepaal hiermee w_0, w_1 en α . Laat zien dat $k = 6$. (α is een rationaal getal in $(0, 1)$.)

- 1 **Oplissing.** Probeer achtereenvolgens de even polynomen $p(t) = 1$, $p(t) = t^2$ en $p(t) = t^4$. Exactheid voor deze polynomen is equivalent met (1) $2 = w_1 + 2w_0$, (2) $\frac{2}{3} = 2w_0\alpha^2$, (3) $\frac{2}{5} = 2w_0\alpha^4$. Delen we (3) op (2) dan zien we dat $\alpha^2 = \frac{3}{5}$, dus $\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$. Invullen in (2) levert $w_0 = \frac{5}{9}$. Invullen in (1) levert $w_1 = \frac{8}{9}$. Omdat de integraal en Q linear werken op de ruimte van functies en we ook exactheid voor alle oneven graads polynomen hebben, zien we dat $I(p) = \frac{5}{9}p(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9}p(0) + \frac{5}{9}p(\sqrt{\frac{3}{5}})$ voor alle polynomen p van graad ≤ 5 . Voor $p(t) = t^6$ vinden we dat $\frac{2}{7} = I(p)$ en $Q(p) = 2\frac{5}{9}(\frac{3}{5})^3$. Duidelijk $I(p) \neq Q(p)$ ($I(p)$ heeft 7 in de noemer, terwijl $Q(p)$ geen 7 in de noemer heeft). Dus geen exactheid voor alle polynomen van graad 6.

(b) Bewijs met een geschikt interpolatie polynoom dat er een $c \neq 0$ is zo dat

$$I(f) = Q(f) + cf^{(6)}(\xi) \quad \text{voor zekere } \xi \in [-1, 1] \quad (f \in C^{(6)}([-1, 1])). \quad (3)$$

(je hoeft geen getalwaarde voor c uit te berekenen. Hint: gebruik ook f' -waarden).

- 1 **Oplissing.** Laat $p = f$ op $(-\alpha, -\alpha, 0, 0, \alpha, \alpha)$. Omdat $p(-\alpha) = f(-\alpha)$, $p(0) = f(0)$, $p(\alpha) = f(\alpha)$ is $I(f) - Q(f) = I(f) - Q(p)$. Omdat p van graad ≤ 5 is, is $I(f) - Q(p) = I(f) - I(p) = I(f - p)$. Verder is $f(x) - p(x) = \frac{1}{6!}f^{(6)}(\xi)q(x)$ met $q(x) \equiv (x + \alpha)^2 x^2 (x - \alpha)^2$. Omdat $q \geq 0$ is (tekenvast) geldt $I(f - p) = \int_{-1}^1 \frac{1}{6!}f^{(6)}(\xi)q(x) dx = \frac{1}{6!}f^{(6)}(\eta) \int_{-1}^1 q(x) dx = cf^{(6)}(\eta)$ voor $c = \frac{1}{6!} \int_{-1}^1 q(x) dx$. Kortom $I(f) - Q(f) = cf^{(6)}(\eta)$.

Voor $h = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) en $t_i \equiv ih + \frac{h}{2}$ luidt de n maal gerepeteerde formule

$$Q_h \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} [w_0 f(t_i - \alpha \frac{h}{2}) + w_1 f(t_i) + w_0 f(t_i + \alpha \frac{h}{2})] \quad (4)$$

en voor f voldoende glad geldt, met $c_2 \equiv \frac{1}{2^7} c [f^{(5)}(1) - f^{(5)}(0)]$, dat

$$\int_0^1 f(t) dt = Q_h + R_h \quad \text{met } R_h = c_2 h^6 + c_4 h^8 + \dots \quad (5)$$

¹Omdat $I(p) = 2 \int_0^1 p(t) dt$ en $Q(p) = w_1 p(0) + 2w_0 p(\alpha)$ voor even polynomen p .

Dit hoef je niet te bewijzen, maar mag je wel gebruiken.

(c) Geef een formule om de fout te schatten in Q_h met behulp van Q_{2h} (je mag aannemen dat hogere orde termen in h in R_{2h} verwaarloosbaar zijn). De foutschatting kan je gebruiken om je benadering Q_h te verbeteren tot, zeg $Q_h^{(1)}$. Geef een formule voor deze gecorrigeerde benadering $Q_h^{(1)}$. Betoog dat $Q_h^{(1)}$ een fout van $\mathcal{O}(h^8)$ heeft.

1 Oplossing. $R_h \approx c_2 h^6$. Hence, $R_{2h} \approx 2^6 c_2 h^6$.

$$I - Q_h \approx c_2 h^6 \frac{1}{2^6 - 1} (2^6 c_2 h^6 - c_2 h^6) \approx \frac{1}{2^6 - 1} (I - Q_{2h}) - (I - Q_h) = \frac{1}{2^6 - 1} (Q_h - Q_{2h}).$$

$$Q_h^{(1)} = Q_h + \frac{1}{2^6 - 1} (Q_h - Q_{2h}) = \frac{2^6}{2^6 - 1} Q_h - \frac{1}{2^6 - 1} Q_{2h}.$$

$$I - Q_h^{(1)} = \frac{2^6}{2^6 - 1} (I - Q_h) - \frac{1}{2^6 - 1} (I - Q_{2h}) = \frac{2^6}{2^6 - 1} (c_2 h^6 + c_3 h^8 + \dots) - \frac{1}{2^6 - 1} (c_2 2^6 h^6 + c_3 2^8 h^8 + \dots) = \tilde{c}_3 h^8.$$

$$\text{Met } \tilde{c}_3 = c_3 \frac{2^6(1-2^2)}{2^6-1}.$$

(d) Hoeveel functiewaarden moet je evalueren om een gecorrigeerde benadering $Q_h^{(1)}$ uit te kunnen rekenen voor $h = 1/2$ ($n = 2$)? Hoeveel functiewaarden moet je evalueren om met behulp van het Romberg schema gebaseerd op de Bulirsch rij en de gerepeteerde trapeziumregel in de $\mathcal{O}(h^8)$ kolom uit te komen?

1 Oplossing. De 6 punten waarin f geëvalueerd moet worden voor Q_h met $n = 2$ verschillen van de 3 punten waarin f uitgerekend moet worden voor $n = 1$. Kortom, er moeten 9 functiewaarden geëvalueerd worden voor $Q_h^{(1)}$ voor $h = 1/2$. Als T_h het trapeziumregel resultaat is voor stapgrootte $h = 2/n$, dan komen we met T_h voor $n = 1$ (kolom $\mathcal{O}(h^2)$), $n = 2$ (kolom $\mathcal{O}(h^4)$), $n = 3$ (kolom $\mathcal{O}(h^6)$) en $n = 4$ tot kolom $\mathcal{O}(h^8)$). We moeten hiervoor f evalueren in $0, 1$ ($n = 1$), $\frac{1}{2}$ ($n = 2$), $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ ($n = 3$), $\frac{1}{4}$ en $\frac{3}{4}$ ($n = 4$), er moeten 7 functiewaarden geëvalueerd worden.

2. We willen in deze opgave de functie $f(x) \equiv 1 + \sin^2(\pi x^2)$ integreren tussen 0 en 1 en gebruiken daartoe de gerepeteerde trapeziumregel met verschillende stapgrootten $h > 0$. We vinden de volgende resultaten

$1/h$	$T_h(f)$
8	1.37783845638733
16	1.37793137490955
32	1.37793633086465
64	1.37793662881191
128	1.37793664725466
256	1.37793664840455

(a) Passen deze resultaten redelijk bij een fout die evenredig is met h^2 ? Was dit te verwachten? Is de fout wel evenredig met een andere macht van h ? Welke?

1 Oplossing. We berekenen de verschillen $T_{2h} - T_h$ tussen twee opeenvolgende T_h -waarden en de quotiënten $V_h \equiv (T_{4h} - T_{2h}) / (T_{2h} - T_h)$ (vertrouwensgetallen) van opeenvolgende verschillen. Dat levert de volgende tabel (voor de nieuwe grootheden afgerond tot vier cijfers)

$1/h$	$T_h(f)$	$T_h - T_{h/2}$	V_h
8	1.37783845638733	*	*
16	1.37793137490955	-0.000 092 92	*
32	1.37793633086465	-0.000 004 956	18.75
64	1.37793662881191	-0.000 000 297 9	16.63
128	1.37793664725466	-0.000 000 018 44	16.16
256	1.37793664840455	-0.000 000 001 150	16.04

Als de fout evenredig geweest zou zijn met h^2 , $I - T_h \approx ch^2$ dan verwachten we dat $V_h \approx 4$ zal zijn, zekere voor de kleinere h . Immers

$$\begin{aligned} V_h &\equiv (T_{4h} - T_{2h}) / (T_{2h} - T_h) \\ &= ((I - T_{2h}) - (I - T_{4h})) / ((I - T_h) - (I - T_{2h})) \\ &\approx (c_4 h^2 - c_{16} h^2) / (c h^2 - c_4 h^2) = (4 - 16) / (1 - 4) = 4. \end{aligned}$$

We zien echter dat $V_h \approx 16$. Dat past beter bij een evenredigheid met h^4 : als $I - T_h \approx ch^4$, dan

$$\begin{aligned} V_h &= ((I - T_{2h}) - (I - T_{4h})) / ((I - T_h) - (I - T_{2h})) \\ &\approx (c16h^4 - c256h^4) / (ch^4 - c16h^4) = (16 - 256) / (1 - 16) = 16. \end{aligned}$$

Voor de fout in de gerepeteerde trapeziumregel geldt

$$I - T_h = -\frac{1}{12}h^2[f'(1) - f'(0)] + c_2h^4 + c_3h^6 + \dots$$

Omdat $f'(x) = 4\pi x \sin(\pi x^2) \cos(\pi x^2)$ en $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$ zien we dat $f'(0) = f'(1) = 0$. Blijkbaar

$$I - T_h = c_2h^4 + c_3h^6 + \dots$$

en was het te verwachten dat de fout niet evenredig zou zijn met h^2 .

(b) Schat de fout in het resultaat voor $h = 1/256$. Hoe gebruik je deze schatting om een nauwkeuriger antwoord te krijgen?

- 1 **Oplossing.** In (a) hebben we uit de numerieke resultaten gezien dat de fout (naar alle waarschijnlijkheid) evenredig is met h^4 ($c_2 \neq 0$). Dus is

$$I - T_h \approx c_2h^4 = \frac{1}{15}[c_2(2h)^4 - c_2h^4] \approx \frac{1}{15}[(I - T_{2h}) - (I - T_h)] = \frac{1}{15}(T_h - T_{2h}).$$

Voor $h = 1/256$ levert dit $(-0.1150 \cdot 10^{-8})/15 = -0.767 \cdot 10^{-10}$.

Als $I - T_h \approx (T_h - T_{2h})/15$, dan is $I \approx T_h + (T_h - T_{2h})/15 = \frac{16}{15}T_h - \frac{1}{15}T_{2h}$ en zal $\frac{16}{15}T_h - \frac{1}{15}T_{2h}$ een betere benadering van I zijn dan T_h . Voor $h = 1/256$ is $\frac{16}{15}T_h - \frac{1}{15}T_{2h} = 1.377936648481209$.

(c) Stel dat je, onder de aanname dat de fout evenredig is met h^2 , de fout schat en het resultaat corrigeert (hoe doe je dat?). Kan je dan, zonder te rekenen, iets zeggen over de 'structuur' van de fout in de 'gecorrigeerde benadering'?

- 1 **Oplossing.** Als de fout evenredig geweest zou zijn met h^2 dan hadden we een gecorrigeerd antwoord berekend met de formule $T_h^{(1)} = \frac{4}{3}T_h - \frac{1}{3}T_{2h}$. Met deze correctie 'halen' we de c_1h^2 term weg van de asymptotische ontwikkeling in h van de fout, ook als $c_1 = 0$. Wat overblijft zijn hogere orde termen:

$$I - T_h^{(1)} = \tilde{c}_2h^4 + \tilde{c}_3h^6 + \dots$$

De fout heeft dezelfde structuur als de benadering heeft (blijkt te hebben) voor correctie.

3. Zij f een 2 maal continu differentieerbaar functie gedefinieerd op \mathbb{R} .

(a) Voor iedere polynoom p , zij

$$R(p) \equiv \max\{|f(x) - p(x)| \mid x \in [-1, 1]\} + \max\{|f(y) - p(y)| \mid y \in \{-2, 0, 2\}\}. \quad (6)$$

Laat zien dat er een eerste graads polynoom p is waarvoor geldt

$$R(p) \leq 2 \max\{|f^{(2)}(\xi)| \mid \xi \in [-2, 2]\}. \quad (7)$$

- 1 **Oplossing.** Zij p het lineaire interpolatie polynoom voor f op $(-1, +1)$. Dan $f(x) - p(x) = \frac{1}{2}f^{(2)}(\xi)(x+1)(x-1) = \frac{1}{2}f^{(2)}(\xi)(x^2 - 1)$ zekere ξ tussen -1 , $+1$, en x . Dus $\max\{|f(x) - p(x)| \mid x \in [-1, 1]\} \leq \frac{1}{2} \max_{\xi, |\xi| \leq 1} |f^{(2)}(\xi)| \leq \frac{1}{2} \max_{\xi, |\xi| \leq 2} |f^{(2)}(\xi)|$ (maximum $x^2 - 1$ in $x = 0$). Verder is $|f(y) - p(y)| \leq \frac{3}{2} \max_{\xi, |\xi| \leq 2} |f^{(2)}(\xi)|$ voor $y = -2, 0, +2$ (maximum $x^2 - 1$ voor $x = y = \pm 2$). Optellen van de schattingen geeft het gevraagde resultaat.

Beschouw, voor een functie g , de volgende twee eigenschappen: g is

- (1) een tweede graads polynoom op iedere interval $[2k - 1, 2k + 1]$ ($k \in \mathbb{Z}$),
- (2) continu differentieerbaar (ook in $x = 2k + 1$) ($k \in \mathbb{Z}$).

Er is een functie B met de eigenschappen (1) en (2) en waar bovendien voor geldt dat, $B(x) > 0$ als $|x| < 3$, $B(x) = 0$ anders, en $\sum_{k \in \mathbb{Z}} B(x - 2k) = 1$ ($x \in \mathbb{R}$). (Dit hoef je niet te bewijzen, maar mag je wel gebruiken). Definieer

$$G(f)(x) \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(2k)B(x - 2k) \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (8)$$

(b) Laat zien dat voor iedere x , $B(x - 2k) \neq 0$ voor ten hoogste drie gehele k . Toon aan dat $G(f)$ de eigenschappen (1) en (2) heeft.

1 Oplossing. Als $|x - 2m| \leq 1$ dan is $|x - 2k| > 3$ als $k + m \notin \{-1, 0, 1\}$. B heeft eigenschappen (1) en (2) en ook de verschoven versies $B(x - 2k)$, verschoven over veelvouden van 2. Voor x , met $|x - 2m| < 1$ is $G(f)$ een eindig lineaire combinatie (som van 3) functies met eigenschap (1) en (2) en heeft dus ook eigenschap (1) en (2).

(c) Voor ieder eerste graads polynoom p geldt $G(p) = p$: dit hoef je ook niet bewijzen maar mag je wel gebruiken. Laat zien dat voor ieder eerste graads polynoom p geldt

$$|f(x) - G(f)(x)| = |(f - p)(x) - G(f - p)(x)| \leq R(p) \quad (|x| \leq 1). \quad (9)$$

Concludeer dat

$$|f(x) - G(f)(x)| \leq 2 \max \left\{ |f^{(2)}(\xi)| \mid \xi \in [-2, 2] \right\} \quad (|x| \leq 1). \quad (10)$$

1 Oplossing. De eerste gelijkheid in (??) volgt uit het gegeven dat $p = G(p)$:

$$|f(x) - G(f)(x)| = |(f - p)(x) - (G(f) - p)(x)| = |(f - p)(x) - G(f - p)(x)| \leq |(f - p)(x)| + |G(f - p)(x)|. \quad \text{Dus}$$

$$|f(x) - G(f)(x)| \leq |(f - p)(x)| + |G(f - p)(x)|$$

Voor $|x| \leq 1$ is

$$|(f - p)(x)| \leq \max_{x, |x| \leq 1} |(f - p)(x)|.$$

Voor $|x| \leq 1$ is $B(x - 2k) = 0$ als $k \in \mathbb{Z}$, $|k| > 1$. Dus met $\phi \equiv f - p$ is

$$\begin{aligned} |G(f - p)(x)| &= |\phi(-2)B(x + 2) + \phi(0)B(x) + \phi(2)B(x - 2)| \\ &\leq |\phi(-2)|B(x + 2) + |\phi(0)|B(x) + |\phi(2)|B(x - 2) \\ &\leq \max(|\phi(-2)|, |\phi(0)|, |\phi(2)|)(B(x + 2) + B(x) + B(x - 2)) \\ &= \max(|\phi(-2)|, |\phi(0)|, |\phi(2)|). \end{aligned}$$

De som van deze bovenschattingen levert $R(p)$ op. In (a) hebben we gezien dat $R(p)$ voor een zekere lineaire p kleiner is dan $2 \max_{\xi, |\xi| \leq 2} |f^{(2)}(\xi)|$.

(d) Om een hogere nauwkeurigheid te krijgen, definiëren we voor $h > 0$

$$G_h(f)(x) \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kh)B\left(\frac{x}{h} - k\right) \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (11)$$

Laat zien dat $G_h(f)$ continu differentieerbaar is, $G_h(f)$ op ieder interval $[2kh - h, 2kh + h]$ een tweede graads polynoom is ($k \in \mathbb{Z}$), en

$$|f(x) - G_h(x)| \leq h^2 2 \max \{ |f^{(2)}(\xi)| \mid \xi \in \mathbb{R} \}. \quad (12)$$

1 Oplossing. Merk eerst op dat (??) impliceert dat

$$|f(x) - G(f)(x)| \leq 2 \max \{ |f^{(2)}(\xi)| \mid \xi \in \mathbb{R} \} \quad (|x| \leq 1).$$

Opdezelfde manier vinden we dezelfde schatting voor $x \in \mathbb{R}$ ook als $|x| > 1$:

$$|f(x) - G(f)(x)| \leq 2 \max \{ |f^{(2)}(\xi)| \mid \xi \in \mathbb{R} \} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Definiëer $F(x) \equiv f(xh)$. Dan is $G_h(f)(hx) = G(F)(x)$. Omdat $G(F)$ continu differentieerbaar is, is $G_h(f)$ dat ook. Omdat $G(F)$ op $[2k - 1, 2k + 1]$ een tweede graads polynoom is, is $G_h(f)(hx)$ dat ook. Als $x \in [2k - 1, 2k + 2]$, dan $hx \in [2kh - h, 2kh + h]$. Dus is $G_h(f)(x)$ een tweede graads polynoom op $[2kh - h, 2kh + h]$. Hierbij we gebruiken we dat als $q(x)$ een tweede graads polynoom is, $q(x/h)$ dat ook is. Verder is

$$|f(hx) - G_h(hx)| = |F(x) - G(F)(x)| \leq 2 \max_{\xi} |F^{(2)}(\xi)| = 2h^2 \max_{\xi} |f^{(2)}(\xi h)| = 2h^2 \max_{\xi} |f^{(2)}(\xi)|.$$

Hierbij hebben we gebruikt dat $F^{(2)}(\xi) = h^2 f^{(2)}(\xi h)$ en het maximum over alle $\xi \in \mathbb{R}$ is hetzelfde als het maximum over alle $h\xi \in \mathbb{R}$.

Puntentelling.

Maximum te behalen punten per onderdeel staat in de kantlijn.