

Tentamen Numerieke Wiskunde

donderdag, 3 januari 2013, 9.00–12.00

1. Zet op ieder vel dat je inlevert je naam en op het eerste vel bovendien nog je studierichting en studentnummer.
2. Je mag het dictaat gebruiken, de uitwerkingen van de opgaven echter niet. Als je een resultaat uit het dictaat gebruikt geef dan duidelijk aan welk resultaat (nummer, pagina, etc.). Resultaten uit een vorig onderdeel mag je gebruiken ook al lukte het je niet om dat onderdeel te bewijzen.
3. Geef bij het beantwoorden van de vragen een duidelijke argumentatie (ook als dat niet expliciet gevraagd wordt).
4. $f \equiv g$ betekent ‘ f is *per definitie* gelijk aan g ’.
5. Succes.

1. Voor $f \in C^4([0, +1])$ benaderen we $\int_0^h f(t) dt$ voor $h \in (0, 1]$, met de kwadratuurformule

$$Q(f) \equiv w_0 f(0) + w_1 f(a),$$

waarbij we $a \in [0, h]$, w_0 en w_1 in \mathbb{R} optimaal kiezen, d.w.z., zo dat de formule exact is voor alle polynomen van graad $k \in \mathbb{N}$ met k maximaal.

(a) Bereken a , w_0 en w_1 .

- 1 **Oplissing.** Schrijf $I(f) \equiv \int_0^h f(t) dt$. Bepaal w_0 , w_1 , a zo dat $I(f) = Q(f)$ voor (i) $f(t) = 1$, (ii) $f(t) = t$, en (iii) $f(t) = t^2$ ($t \in [0, h]$): (i) $h = w_0 + w_1$, (ii) $\frac{1}{2}h^2 = w_1 a$, (iii) $\frac{1}{3}h^3 = w_1 a^2$. Delen van (iii) en (ii) levert $\frac{2}{3}h = a$. Merk op dat deze waarde in $(0, h)$ is. Invullen in (ii) leert dat $w_1 = \frac{3}{4}h$. De waarde voor a en w_1 invullen in (i) geeft $w_0 = \frac{1}{4}h$. Dus $Q(f) = \frac{1}{4}hf(0) + \frac{3}{4}hf(\frac{2}{3}h)$. Omdat I en Q lineair zijn, geldt $I(f) = Q(f)$ voor alle lineaire combinaties van 1 , t en t^2 , dus voor alle polynomen van graad ≤ 2 . Met $f(t) = t^3$ is $I(f) = \frac{1}{4}h^4$, terwijl $Q(f) = \frac{3}{4}h(\frac{2}{3}h)^3 = \frac{1}{18}h^4 \neq I(f)$. De formule $I(f) = Q(f)$ is dus niet exact voor alle polynomen van graad 3: blijkbaar $k = 2$.

Zij $R(f)$ de restterm:

$$\int_0^h f(t) dt = Q(f) + R(f).$$

(b) Bewijs met behulp van tweede graads interpolatie dat er een $c \in \mathbb{R}$ is en een $\ell \in \mathbb{N}$ zodat voor iedere $f \in C^\infty([0, h])$ geldt

$$R(f) = ch^{\ell+1} f^{(\ell)}(\xi) \quad \text{voor zekere } \xi \in [0, h].$$

Bereken c en toon aan dat $\ell = 3$. (Hint: gebruik een f' -waarde.)

- 1 **Oplissing.** Zij p een polynoom van graad 2 zo dat $p(0) = f(0)$, $p(a) = f(a)$ en $p'(a) = f'(a)$ (zo'n polynoom bestaat volgens Stelling 1.3.2). Omdat p van graad 2 is, geldt $I(p) = Q(p)$. Omdat $p(0) = f(0)$ en $p(a) = f(a)$ geldt $Q(p) = Q(f)$. Dus $I(f) - Q(f) = I(f) - I(p) = I(f - p)$. Hierbij hebben we gebruikt dat I lineair is. Volgens Stelling 1.3.3 is $f(t) - p(t) = \frac{1}{3!}t(t-a)^2 f^{(3)}(\xi_t)$ voor zekere ξ_t in $[0, h]$. Omdat $t(t-a)^2 \geq 0$ op $[0, h]$ (tekenvast) en $f^{(3)}$ continue geldt (zie Stelling 4.1.2) $I(f - p) = f^{(3)}(\xi)c$ voor zekere $\xi \in (0, h)$ en $c = I(\frac{1}{3!}t(t-a)^2)$. Uit (a) weten we dat $I(t^3) - Q(t^3) = (\frac{1}{4} - \frac{1}{18})h^4$ en dat is blijkbaar gelijk aan $3!c$. Dus $R(f) = I(f) - Q(f) = \frac{1}{3!}(\frac{1}{4} - \frac{1}{18})h^4 f^{(3)}(\xi)$: $\ell = 3 = k + 1$ $c = \frac{1}{3!}(\frac{1}{4} - \frac{1}{18})$.

(c) We repeteren Q . Geef, voor $n \in \mathbb{N}$, de n -maal gerepeteerde kwadratuurformule $Q_n(f)$ op $[0, 1]$ (voor de stapgrootte h geldt dus $nh = 1$).

Zij $R_n(f)$ de restterm bij deze gerepeteerde formule: $\int_0^1 f(t) dt = Q_n(f) + R_n(f)$.

Toon aan dat, voor iedere $f \in C^4([0, 1])$, geldt

$$R_n(f) = ch^3 \int_0^1 f^{(3)}(t) dt + \mathcal{O}(h^4) \quad \text{voor } h \rightarrow 0.$$

- 1 **Oplissing.** Neem $h = 1/n$.

$\int_0^1 f(t) dt = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{jh}^{j+1} f(t) dt = h \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{4} f(jh) + \frac{3}{4} f(jh + \frac{2}{3}h) \right) + \sum_{j=0}^{n-1} ch^4 f^{(3)}(\xi_j)$ met $\xi_j \in (jh, jh + h)$. $R_n(f) = ch^3 \sum_{j=0}^{n-1} hf^{(3)}(\xi_j)$. De ‘som’ is een Riemann som voor $\int_0^1 f^{(3)}(t) dt$, d.w.z. is gelijk aan $\int_0^1 f^{(3)}(t) dt$ op een term van $\mathcal{O}(h)$ na (als $f^{(3)}$ continu differentieerbaar is) ($h \rightarrow 0$). Blijkbaar $R_n(f) = ch^3 \int_0^1 f^{(3)}(t) dt + \mathcal{O}(h^4)$ voor $h \rightarrow 0$.

(d) Kun je een automatische integratie procedure met variabele stapgrootte baseren op deze gerepeteerde formule? Zo ja, hoe richt je deze procedure dan in?

$\frac{1}{2}$ Oplossing. In (c) hebben we gezien dat voor h klein genoeg de fout evenredig is met h^3 . Dat betekent dat $R(h) \equiv R_n(f) \approx 8R(\frac{1}{2}h)$ voor h klein genoeg en dus

$R(\frac{1}{2}h) = I - Q(\frac{1}{2}h) \approx \frac{1}{7}(Q(\frac{1}{2}h) - Q(h))$. Deze laatste uitdrukking is berekenbaar. De fout kan dus automatisch geschat worden (mits h klein genoeg is). We hebben vertrouwen dat de aanname ‘ h is klein genoeg’ correct is als $\frac{Q(2h) - Q(h)}{Q(h) - Q(\frac{1}{2}h)} \approx 8$ is.

De automatische procedure is dus als volgt. Begin met $h = 1$ en halveer h tot dat $\frac{1}{7}(Q(h) - Q(2h)) \leq tol$ is en $|\frac{Q(4h) - Q(2h)}{Q(2h) - Q(h)} - 8| \leq 0.05$, met tol de gewenste nauwkeurigheid.

2. We benaderen de integraal $I \equiv \int_0^1 \exp(-t^2) dt$ voor diverse stapgrootten $h = \frac{1}{n}$ met $n \in \mathbb{N}$ door

$$Q(h) \equiv h[f(0) + f(h) + f(2h) + \dots + f(1 - 2h) + f(1 - h)].$$

We vinden de volgende waarden

h	–	$Q(h)$
$\frac{1}{2}$	–	0.8894004
$\frac{1}{4}$	–	0.8219992
$\frac{1}{8}$	–	0.7853731
$\frac{1}{16}$	–	0.7663384
$\frac{1}{32}$	–	0.7566411
$\frac{1}{64}$	–	0.7517476

(a) Laat zien dat de getallen redelijk passen bij een fout die evenredig is met h .

1 Oplossing. Als de fout evenredig is met h , dan is $V(h) \equiv \frac{Q(4h) - Q(2h)}{Q(2h) - Q(h)} \approx 2$ en de waarde van $V(h)$ is dichter bij 2 naarmate h kleiner is. Welnu: $V(\frac{1}{8}) = 1.8403$, $V(\frac{1}{16}) = 1.9242$, $V(\frac{1}{32}) = 1.9629$, $V(\frac{1}{64}) = 1.9817$,

(b) Geef theoretische argumenten die laten zien dat deze evenredigheid met h te verwachten was (Hint: vat $Q(h)$ op als een “verstoorde” trapeziumregel $T(h)$).

1 Oplossing. Voor de gerepeteerde trapeziumregel $T(h)$ geldt

$T(h) = h[\frac{1}{2}f(0) + f(h) + f(2h) + \dots + f(1 - h) + \frac{1}{2}f(1)]$. Blijkbaar $Q(h) = T(h) + h[\frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{2}f(1)]$. Dus $I - Q(h) = I - T(h) - h[\frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{2}f(1)] = \frac{1}{12}h^2[f'(1) - f'(0)] + \mathcal{O}(h^4) - h[\frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{2}f(1)]$. Hierbij hebben we de foutuitdrukking in Stelling 4.2.1 voor de gerepeteerde trapeziumregel gebruikt (zie ook (65) in het dictaat). Dus voor h klein genoeg (zodat de $\mathcal{O}(h^2)$ -termen verwaarloosbaar zijn), is de fout de benadering $Q(h)$ van I ongeveer gelijk aan $-h[\frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{2}f(1)]$ en is dus evenredig met h als $f(0) \neq f(1)$. Voor $f(t) = \exp(-t^2)$ is dat laatste het geval.

(c) Schat de fout in de benaderingen zoals die boven gegeven zijn en gebruik die schattingen om de gegeven benaderingen te corrigeren.

$\frac{1}{2}$ Oplossing. Omdat de fout evenredig is met h kunnen we die schatten door $I - Q(h) \approx Q(h) - Q(2h)$. Dus $I - Q(\frac{1}{64}) \approx 0.7517476 - 0.7566411 = 0.0048935 \approx 0.005$. Omdat $Q(h) - Q(2h)$ een goede fout schatting is voor $I - Q(h)$ (gebruik 0.0048935 en niet 0.005) is $I \approx 2Q(h) - Q(2h)$ waarschijnlijk een beter benadering voor I dan $Q(h)$.

(d) Kun je ook de fout in deze gecorrigeerde benaderingen (de tweede kolom in een “Romberg schema”) schatten en de schatting weer gebruiken om een nog betere benadering te verkrijgen (derde kolom in een Romberg schema)? Motiveer je antwoord en geef aan hoe de schattingen en correcties uitgevoerd zullen worden (je hoeft hier geen numerieke waarden te produceren). Geef aan hoe je verder dit Romberg schema af zult maken.

1 Oplossing. De correctie die we in (c) voorgesteld hebben, $2Q(h) - Q(2h)$ in plaats van $Q(h)$, ‘verwijdert’ de $\mathcal{O}(h)$ -term in de fout. Wat overblijft is een machtreeks in h^2 . Immers de gerepeteerde trapeziumregel heeft een fout van deze vorm en $2Q(h) - Q(2h) = 2T(h) - T(2h) = (I - T(h)) - 2(I - T(2h))$. Kortom, na de tweede kolom kunnen we doorgaan zoals gebruikelijk voor het Romberg schema voor de gerepeteerde Trapeziumregel.

3. Beschouw een $f \in C^{(4)}([0, 1])$.

Voor $h > 0$ is p het Hermite interpolatie polynoom voor f op 0 en h , d.w.z., p is van minimale graad en $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$, $p(h) = f(h)$ en $p'(h) = f'(h)$.

De maxima in deze opgave worden genomen over x (of ξ) in $[0, h]$.

(a) Wat is de graad van p ? Voor iedere $x \in [0, h]$ is er een $\xi \in (0, h)$ zo dat

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{4!}x^2(x-h)^2f^{(4)}(\xi). \quad (1)$$

Waarom? Laat zien dat

$$\max_x |f(x) - p(x)| \leq \frac{h^4}{2^4 4!} \max_\xi |f^{(4)}(\xi)|. \quad (2)$$

1 Oplossing. De graad van p is ten hoogste 3, zie Stelling 1.3.2. Volgens Stelling 1.3.3 is $f(x) - p(x) = \frac{1}{4!}(x-a_0)^2(x-a_1)^2f^{(4)}(\xi)$ als $p = f$ op (a_0, a_0, a_1, a_1) . In het huidige geval is $(a_0, a_0, a_1, a_1) = (0, 0, h, h)$. De functie $|x(x-h)|$ is op $[0, h]$ maximaal in $x = \frac{1}{2}h$ en neem daar de waarde $\frac{1}{4}h^2$ aan. Afschatten van (1) levert dus de schatting $\frac{1}{4!}(\frac{1}{4}h^2)^2M$ met $M \equiv \max_\xi |f^{(4)}(\xi)|$ en dat is precies de schatting in (2).

We willen aantonen dat

$$\max_x |f'(x) - p'(x)| = \mathcal{O}(h^3) \text{ voor } h \rightarrow 0. \quad (3)$$

(b) Kun je (2) gebruiken om (3) te bewijzen? Kun je (1) hiervoor gebruiken?

$\frac{1}{2}$ Oplossing. (2) is een bovenschatting. Dat zegt niets over de afgeleide. (1) is niet bruikbaar omdat ξ van x afhangt en het is niet duidelijk op welke manier dat is.

(c) Laat zien dat p' het Lagrange interpolatie polynoom is voor f' op 0, h en η voor 'n η in $(0, h)$. Concludeer dat er voor iedere $x \in [0, h]$ een ξ in $(0, h)$ is waarvoor

$$f'(x) - p'(x) = \frac{1}{3!}x(x-h)(x-\eta)f^{(4)}(\xi). \quad (4)$$

1 Oplossing. Omdat $(p-f)(0) = p(0) - f(0) = 0$ en $(p-f)(h) = p(h) - f(h) = 0$ is, volgens de stelling van Rolle, $(p-f)'(\eta) = p'(\eta) - f'(\eta) = 0$ voor zekere η in $(0, h)$. Bruikbaar is $p' = f'$ op $(0, \eta, h)$ (we wisten al dat $p'(0) = f'(0)$ en $p'(h) = f'(h)$) en is p' het Lagrange interpolatie polynoom voor f' op $(0, \eta, h)$. Volgens Stelling 1.3.3 (of formule (11) in het dictaat) geeft dat uitdrukking (4) voor de fout. Merk op dat we de functie f' benaderd hebben en dat de derde afgeleide van deze functie $f^{(4)}$ is.

(d) Toon aan dat

$$\max_x |f'(x) - p'(x)| = \frac{2h^3}{3^4} \max_\xi |f^{(4)}(\xi)|. \quad (5)$$

$\frac{1}{2}$ Oplossing. Een scherpe schatting wordt verkregen door bij een vaste η een maximale waarde van $x(x-h)(x-\eta)$ op te sporen en vervolgens de maximaliseren naar η . Een eenvoudig argument is het volgende. Als $x \in [0, \frac{1}{2}h]$, dat is $|x-\eta| \leq |x-h|$ en $|x(x-h)(x-\eta)| \leq |x(x-h)^2|$. Evenzo, als $x \in [\frac{1}{2}h, h]$ dan is $|x(x-h)(x-\eta)| \leq |x^2(x-h)|$. $\phi(x) \equiv x^2(x-h)$ is maximaal voor $x = \frac{2}{3}h$ (dan is $\phi'(x) = 0$ en geldt bovendien $x \in [\frac{1}{2}h, h]$). Dan is $\phi(x) = \frac{4}{3^3}h^3$. Dit levert schatting (5).

Puntentelling.

Maximum te behalen punten per onderdeel staat in de kantlijn.