Universiteit Utrecht
Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Boedapestlaan 6
3584 CD Utrecht

Deeltentamen 2 Kansrekening 2012

* **Schrijf de uitwerkingen van de verschillende opgaven op aparte tentamenpapier**.

* Zet op elk blaadje dat je inlevert je naam en collegekaartnummer. Zet op het eerste blad ook de naam van je werkcollegebegeleider.

* Als je een onderdeel niet kan oplossen, ga dan verder met het volgende. Je mag gerust gebruik maken van wat er in de tekst van een onopgelost onderdeel staat. Geef niet alleen antwoorden, maar laat de hele redenering zien die tot het antwoord leidt.

* Punten per opgave:

opgave:	1	2	3	4	5
punten:	20	20	20	20	20

1. Stel dat de simultane kansdichtheid van de stochasten X en Y gegeven wordt door

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda^3 x e^{-\lambda y}, & \text{als } 0 < x < y; \\ \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

   (a) Bepaal de kansdichtheid $f_Y(y)$ van Y.

   (b) Bepaal de verwachting $E\left(\frac{1}{Y^2}\right)$.

   (c) Bepaal, voor $y > 0$, de conditionele kansdichtheid $f_X(x|Y = y)$ van X gegeven $Y = y$.

   (d) Bereken $E(X|Y = y)$ en laat vervolgens zien dat $3E(X) = 2E(Y)$.

2. Stel dat klanten een winkel binnenkomen volgens een Poisson proces met intensiteit λ klanten per minuut. Stel dat iedere klant een vrouw is met kans p (onafhankelijk van alle andere klanten). Laat $N(t)$ het aantal klanten zijn dat binnenkomt in het tijdsinterval $[0, t]$ en laat $X(t)$ het aantal vrouwelijke klanten zijn dat binnenkomt in het tijdsinterval $[0, t]$.

   (a) Laat zien dat voor alle $t > 0$ geldt

$$P(X(t) = n) = \frac{e^{-\lambda pt}(\lambda pt)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \cdots.$$

   (b) Bepaal $P(N(2) = 2|N(3) = 3)$.

(c) Zij T_i de aankomsttijd van de $i$de vrouwelijke klant. Bepaal

$$P(T_{i+1} - T_i > 2 \,|\, T_i - T_{i-1} > 5).$$

3. Zij X, Y en Z drie onderling onafhankelijke standaard normaal verdeelde stochasten.

   (a) Bepaal $P(|X| \leq 1, |Y| \leq 1, |Z| \leq 1)$.

   (b) Bepaal $E((X+Y)^2 Z)$.

   (c) Bepaal $P(X + Y \leq 2Z + 1)$.

4. Zij X een uniform verdeelde stochast op het interval $(0, 2)$. De conditionele kansdichtheid van de stochast Y gegeven $X = x$, waarbij $0 < x < 2$, wordt gegeven door

$$f_X(x|Y=y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{als } 0 < y < x; \\ \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

   (a) Zij $T = \dfrac{1}{X}$. Bepaal de kansdichtheid van T.

   (b) Bepaal de simultane kansdichtheid $f_{(X,Y)}(x, y) = f(x, y)$ van X en Y. Bepaal vervolgens ook $E(XY)$.

   (c) Zij $Z = X+Y$. Bepaal de cumulatieve verdelingsfunctie F_Z en de kansdichtheid f_Z van Z.

5. Zij $N, X_1, X_2, X_3, \ldots$ een rij van onafhankelijke stochasten, waarbij N Poisson verdeeld is met parameter $\mu > 0$ en de stochasten X_i exponentieel verdeeld zijn met parameter $\lambda > 0$ voor $i \geq 1$. Definieer

$$Y = \begin{cases} \max(X_1, X_2, \ldots, X_n), & \text{als } N = n,\ n \geq 1; \\ \\ 0, & \text{als } N = 0. \end{cases}$$

en

$$S = \begin{cases} X_1 + X_2 + \cdots + X_n, & \text{als } N = n,\ n \geq 1; \\ \\ 0. & \text{als } N = 0. \end{cases}$$

   (a) Bepaal $P(Y \leq t | N = n)$.

   (b) Bepaal $P(Y \leq t)$ voor $t > 0$.

   (c) Bepaal $P(S = 0)$.

   (d) Bepaal $E(S)$.