Universiteit Utrecht 35 pt Boedapestlaan 6
Mathematisch Instituut 3584 CD Utrecht

Uitwerkingen Hertentamen Kansrekening 2012/2013

* Zet op elk blaadje dat je inlevert je naam en collegekaartnummer. Zet op het eerste blad ook de naam van je werkcollegebegeleider.

* Als je een onderdeel niet kan oplossen, ga dan verder met het volgende. Je mag gerust gebruik maken van wat er in de tekst van een onopgelost onderdeel staat. Geef niet alleen antwoorden, maar laat de hele redenering zien die tot het antwoord leidt.

* Punten per opgave:

opgave:	1	2	3	4	5
punten:	20	20	20	20	20

1. Een doos bevat 5 ballen waarvan N rood en $5-N$ groen zijn. Stel dat N onbekend is met $P(N=i)=\frac{1}{6}$ voor $i=0,1,\cdots,5$. We trekken drie ballen uit de doos.

   (a) Stel dat we trekken **met teruglegging**. Wat is de kans dat de eerste getrokken bal rood én de tweede getrokken bal groen én de derde getrokken bal rood zijn?

   (b) Stel dat we trekken **met teruglegging**. Als gegeven is dat de eerste getrokken bal rood én de tweede getrokken bal groen én de derde getrokken bal rood zijn, wat is dan de kans dat $N=3$?

   (c) Stel dat we trekken **zonder teruglegging**. Wat is de kans dat de eerste getrokken bal rood én de tweede getrokken bal groen én de derde getrokken bal rood zijn?

   uitwerking (a): Laat RGR de gebeurtenis zijn dat de eerste getrokken bal rood én de tweede getrokken bal groen én de derde getrokken bal rood zijn.

$$\begin{aligned} P(RGR) &= \sum_{i=0}^{5} P(RGR|N=i)P(N=i) \\ &= 0 + \frac{1}{5}\frac{4}{5}\frac{1}{5}\frac{1}{6} + \frac{2}{5}\frac{3}{5}\frac{2}{5}\frac{1}{6} + \frac{3}{5}\frac{2}{5}\frac{3}{5}\frac{1}{6} + \frac{4}{5}\frac{1}{5}\frac{4}{5}\frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{15} = 0,067. \end{aligned}$$

   uitwerking (b):

$$
\begin{aligned}
P(N=3|RGR) &= \frac{P(RGR|N=3)P(N=3)}{P(RGR)} \\
&= \frac{3/25}{1/15} = 9/25 = 0,36.
\end{aligned}
$$

uitwerking (c):

$$
\begin{aligned}
P(RGR) &= \sum_{i=0}^{5} P(RGR|N=i)P(N=i) \\
&= 0 + 0 + \frac{2}{5}\frac{3}{4}\frac{1}{3}\frac{1}{6} + \frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{6} + \frac{4}{5}\frac{1}{4}\frac{3}{3}\frac{1}{6} + 0 \\
&= \frac{1}{12} = 0,083.
\end{aligned}
$$

2. Zij X een exponentieel verdeelde stochast met parameter α (d.w.z. X heeft dichtheid $f_X(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, $x \geq 0$ en 0 elders), en Y een exponentieel verdeelde stochast met parameter β. Veronderstel dat X en Y onafhankelijk zijn.
   (a) Laat zien dat $P(X > Y) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$.
   (b) Laat zien dat $Z = \min(X, Y)$ exponentieel verdeeld is met parameter $\alpha + \beta$.
   (c) Bepaal de cumulatieve verdelingsfunctie F_{X+Y} en de kansdichtheid f_{X+Y} van $X + Y$.

uitwerking (a): X en Y zijn onafhankelijk, dus is de simultane dichtheid van X en Y gegeven door $f_{(X,Y)}(x, y) = f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, d.w.z.

$$
f(x,y) = \begin{cases} \alpha\beta e^{-\alpha x - \beta y} & \text{als } 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty \\ \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}
$$

Dus,

$$
P(X > Y) = \int_0^\infty \int_0^x \alpha\beta e^{-\alpha x - \beta y}\, dy\, dx = \cdots = \frac{\beta}{\alpha+\beta}.
$$

uitwerking (b): Zij $z > 0$, dan

$$
\begin{aligned}
P(Z > z) &= P(X > z, Y > z) \\
&= P(X > z)P(Y > z) \\
&= e^{-\alpha z}\, e^{-\beta y} = e^{-(\alpha+\beta)z}.
\end{aligned}
$$

Dus,

$$
P(Z \leq z) = 1 - e^{-(\alpha+\beta)z} = \int_0^z (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)u}\, du,
$$

zodat Z is exponentieel verdeeld met parameter $\alpha + \beta$ (met dichtheid $f_Z(z) = (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}$ als $z > 0$ en 0 anders.

uitwerking (c): Als $z < 0$, dan $f_{X+Y}(z) = F_{X+Y}(z) + 0$. Voor $z > 0$, en $\alpha \neq \beta$ de kansdichtheid wordt gegeven door $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\, dx$, waarbij $f(x,y)$ de simultane dichtheid van X en Y is. Omdat $f(x, z-x) > 0$ voor $x > 0$, $z - x > 0$ en is 0 anders, krijgen we (uit onderdeel (a)) voor $z > 0$

$$\begin{aligned}
f_{X+Y}(z) &= \int_0^z \alpha\beta e^{-\alpha x - \beta z + \beta x}\, dx \\
&= \alpha\beta e^{-\beta z} \int_0^z e^{x(\beta-\alpha)}\, dx \\
&= \frac{\alpha\beta e^{-\beta z}}{\beta - \alpha}\, e^{x(\beta-\alpha)}|_0^z \\
&= \frac{\alpha\beta e^{-\beta z}}{\beta - \alpha} \left(e^{z(\beta-\alpha)} - 1\right) \\
&= \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha} \left(e^{-\alpha z} - e^{-\beta z}.\right)
\end{aligned}$$

Voor $z > 0$ en $\alpha \neq \beta$, de cumulatieve verdelingsfunctie wordt gegeven door

$$F_{X+Y}(z) = \int_0^z \int_0^{z-x} \alpha\beta e^{-\alpha x} e^{-\beta y}\, dy\, dx = \cdots = 1 + \frac{\alpha e^{-\beta z}}{\beta - \alpha} - \frac{\beta e^{-\alpha z}}{\beta - \alpha}.$$

Voor $\alpha = \beta$ en $z > 0$, de cumulatieve verdelingsfunctie wordt gegeven door

$$F_{X+Y}(z) = \int_0^z \int_0^{z-x} \alpha^2 e^{-\alpha x} e^{-\alpha y}\, dy\, dx = \cdots = 1 - \alpha z e^{-\alpha z} - e^{-\alpha z}.$$

Voor $\alpha = \beta$ en $z > 0$, de kansdichtheid wordt gegeven door

$$f_{X+Y}(z) = \frac{dF_{X+Y}}{dz}(z) = \alpha^2 z e^{-\alpha z}.$$

3. Stel dat de simultane dichtheid van X en Y gegeven wordt door

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-y} e^{-x/y}}{y}, & \text{als } 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty; \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

   (a) Laat zien dat Y exponentieel verdeeld is met parameter $\lambda = 1$.

   (b) Laat zien dat $f_X(x|Y = y)$, de conditionele dichtheid van X gegeven $Y = y$, gegeven wordt door

$$f_X(x|Y = y) = \begin{cases} \frac{e^{-x/y}}{y}, & \text{als } 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty; \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

(c) Bepaal, voor $y > 0$, de conditionele kans $P(X > 1|Y = y)$.

(d) Bepaal $E(X)$.

uitwerking (a): Als $0 < y < \infty$, dan

$$f_Y(y) = \int_0^\infty \frac{e^{-y}e^{-x/y}}{y}\,dx = -e^{-y}e^{-x/y}|_0^\infty = e^{-y},$$

en als $y \le 0$, dan is $f_Y(y) = 0$. Dus Y is exponentieel verdeeld met parameter $\lambda = 1$.

uitwerking (b):

$$f_X(x|Y = y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{e^{-x/y}}{y} & \text{als } 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

uitwerking (c):

$$P(X > 1|Y = y) = 1 - P(X \le 1|Y = y).$$

Nu,

$$P(X \le 1|Y = y) = \int_{-\infty}^1 f_X(x|Y = y)\,dx = \int_0^1 \frac{e^{-x/y}}{y}\,dx = 1 - e^{-1/y}.$$

Dus,

$$P(X > 1|Y = y) = e^{-1/y}.$$

uitwerking (d): We gebruiken het volgende formule,

$$E(X) = \int_{-\infty}^\infty E(X|Y = y) f_Y(y)\,dy.$$

We bepalen eerst

$$E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^\infty x\, f_X(x|Y = y)\,dx = \int_0^\infty x\,\frac{e^{-x/y}}{y}\,dx = \cdots = y.$$

Dus,

$$E(X) = \int_0^\infty y e^{-y}\,dy = E(Y) = 1.$$

4. Zij Z_1, Z_2, Z_3 onfhankelijke standaard normaal verdeelde stochasten.

   (a) Bepaal $P(\max(Z_1, Z_2, Z_3) > 0)$.

   (b) Bepaal de kansdichtheid van de stochast $W = 3Z_1 - 2Z_2 - 4Z_3$. Bereken vervolgens $P(3Z_1 - 2Z_2 < 4Z_3 + 1)$.

uitwerking (a): Wegens onafhankelijkheids en gelijk verdeling hebben we,

$$P(\max(Z_1, Z_2, Z_3) > 0) = 1 - P(\max(Z_1, Z_2, Z_3) \leq 0) = 1 - (P(Z_1 \leq 0))^3 = \frac{7}{8}.$$

uitwerking (b): De stochast W is normaal $N(0, 29)$ verdeeld en dus de kansdichtheid wordt gegeven door

$$f_W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{29}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{29}}.$$

Merkop dat de stochast $Z = W/\sqrt{29}$ is standaard normaal verdeeld. Met behulp van de normale tabel hebben we,

$$P(3Z_1 - 2Z_2 < 4Z_3 + 1) = P(W < 1) = P(Z < \frac{1}{\sqrt{29}}) = 0,5753.$$

5. Zij $N, X_1, X_2, X_3, \cdots$ een rij van onafhankelijke stochasten met N geometrisch verdeeld met parameter $0 < p < 1$, en de stochasten X_i Poisson verdeeld met parameter $\lambda > 0$ voor $i = 1, 2, \ldots$ Definieer een stochast Y als volgt:

$$Y := X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad \text{als } N = n, \; n \geq 1.$$

(a) Laat zien dat $E(Y \mid N) = \lambda N$, en $E(Y) = \dfrac{\lambda}{p}$.

(b) Bepaal $P(Y = k, \, N = n)$ voor $k \geq 0$ en $n \geq 1$.

uitwerking (a): We bepalen $E(Y|N = n)$, voor $n \geq 1$. Wegens onafhankelijheids van N en X_i en de gelijke verdeling van de X_i, hebben we

$$\begin{aligned} E(Y|N = n) &= E(X_1 + \cdots + X_n | N = n) \\ &= E(X_1 \cdots + X_n) = nE(X_1) = n\lambda. \end{aligned}$$

Er volgt dus dat $E(Y|N) = N\lambda$. Nu,

$$E(Y) = E(E(Y|N)) = E(N\lambda) = \lambda E(N) = \frac{\lambda}{p}.$$

uitwerking (b): Merkop dat wegens onafhankelijkheids, de stochast $X_1 + \cdots + X_n$ is Poisson vedeeld met parameter $n\lambda$ voor alle $n \geq 1$. Dus

$$P(X_1 + \cdots + X_n = k) = \frac{e^{-n\lambda}(n\lambda)^k}{k!},$$

voor $n \geq 1$ en $k \geq 0$. Wegens onafhankelijheids van N en X_i, hebben we

$$\begin{aligned} P(Y = k, N = n) &= P(Y = k | N = n) P(N = n) \\ &= P(X_1 + \cdots + X_n = k | N = n) P(N = n) \\ &= P(X_1 + \cdots + X_n = k) P(N = n) \\ &= \frac{e^{-n\lambda}(n\lambda)^k}{k!} p(1-p)^{n-1}. \end{aligned}$$