Universiteit Utrecht
Mathematisch Instituut

Universiteit Utrecht

Boedapestlaan 6
3584 CD Utrecht

Uitwerkingen Deeltentamen 1 Kansrekening 2012

* Zet op elk blaadje dat je inlevert je naam en collegekaartnummer. Zet op het eerste blad ook de naam van je werkcollegebegeleider.
* Als je een onderdeel niet kan oplossen, ga dan verder met het volgende. Je mag gerust gebruik maken van wat er in de tekst van een onopgelost onderdeel staat. Geef niet alleen antwoorden, maar laat de hele redenering zien die tot het antwoord leidt.
* Punten per opgave:

opgave:	1	2	3	4	5	6
punten:	15	15	15	15	20	20

1. We werpen N zuivere dobbelstenen. Hierbij is N een stochastische variabele met $P(N = n) = 2^{-n}$ voor $n \geq 1$. Zij S het aantal geworpen ogen.

   (a) Bepaal $P(S = 4 \,|\, N = 2)$. (4 pt.)

   (b) Bepaal $P(S = 4)$. (5 pt)

   (c) Bepaal $P(N = 2 \,|\, S = 4)$. (3 pt)

   (d) Bepaal $P(N = 2, S = 4)$. (3 pt)

   Uitwerking (a) Zij X_i de opgetreden oog op de $i$de worp. Dan

$$\begin{aligned} P(S = 4 \,|\, N = 2) &= P(X_1 = 1, X_2 = 3) + P(X_1 = 3, X_2 = 1) + P(X_1 = 2, X_2 = 2) \\ &= 3/36 = 1/12 \end{aligned}$$

   Uitwerking (b)

$$P(S = 4) = \sum_{n=1}^{4} P(S = 4 \,|\, N = n)P(N = n).$$

   Nu,

$$P(S = 4 \,|\, N = 1)P(N = 1) = P(X_1 = 4)P(N = 1) = 1/12,$$

   en

$$P(S = 4 \,|\, N = 2)P(N = 2) = \frac{1}{12}\frac{1}{4} = \frac{1}{48},$$

en

$$\begin{aligned}
P(S=4\,|\,N=3) &= P(X_1=1,X_2=1,X_3=2)+P(X_1=1,X_2=2,X_3=1)\\
&+ P(X_1=2,X_2=1,X_3=1)\\
&= \frac{3}{216},
\end{aligned}$$

dus

$$P(S=4\,|\,N=3)P(N=3) = \frac{3}{216}\frac{1}{8} = \frac{1}{576}.$$

$$P(S=4\,|\,N=4)P(N=3) = P(X_1=1,X_2=1,X_3=1,X_4=1)P(N=4) = \frac{1}{20736}.$$

We krijgen

$$P(S=4) = \frac{1}{12}+\frac{1}{48}+\frac{1}{576}+\frac{1}{20736} = \frac{2197}{20736}.$$

2. Zij A en B onafhankelijke gebeurtenissen met $P(A)=\frac{1}{4}$ en $P(B)=\frac{1}{3}$. Zij $X=I_A$ en $Y=I_B$ de indicatorfuncties van respectievelijk A en B.

   (a) Bepaal de simultane verdeling van de stochasten $X+Y$ en $X-Y$. (8 pt.)

   (b) Bepaal de (marginale) verdeling van $X+Y$. (3 pt.)

   (c) Bepaal $\mathrm{SD}(X-Y)$, de standaarddeviatie van de stochast $X-Y$. (4 pt.)

uitwerking (a): Merkop dat $X+Y$ neemt waarden in $\{0,1,2\}$ en $X-Y$ neemt waarden in $\{-1,0,1\}$. De simultane cerdeling wordt gegevn in de volgende tabel:

Table 1: De simultane en marginale verdelingen van $X-Y$ and $X+Y$.

	$X+Y=b$			
$X-Y=a$	0	1	2	$\mathrm{P}(X-Y=a)$
-1	0	1/4	0	1/4
0	1/2	0	1/12	7/12
1	0	1/6	0	1/6
$\mathrm{P}(X+Y=b)$	1/2	5/12	1/12	1

uitwerking (b): Van de bovenstaande tabel zien we dat

$$P(X=0)=1/2,\ P(X=1)=5/12,\ P(X=2)=1/12.$$

uitwerking (c): Eerst merkop dat X en Y Bernoulli stochasten zijn met $P(X=1)=1/4$ en $P(Y=1)=1/3$. Dus $\mathrm{Var}(X)=\frac{1}{4}\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$ en $\mathrm{Var}(Y)=\frac{1}{3}\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$. Wegens onafhankelijkheids hebben we

$$\mathrm{Var}(X-Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)=\frac{3}{16}+\frac{2}{9}=\frac{59}{144}=0,4097.$$

Dus, $\mathrm{SD}(X-Y)=\sqrt{\frac{59}{144}}=0,640095.$

3. Zij $0 < p < 1$ en zij X en Y stochastische variabelen met simultane verdeling

$$P(X = k, Y = \ell) = \frac{2\ell p(1-p)^{k-1}}{k(k+1)},$$

voor $\ell = 1, 2, \cdots, k$ en $k = 1, 2, \cdots$.

(a) Laat zien dat X geometrisch verdeeld is met parameter p. (8 pt.)

(b) Laat zien dat $E\left(\frac{X^2(X+1)}{Y}\right) = 2E(X^2) = \frac{4-2p}{p^2}$. (7 pt.)

uitwerking (a):

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{\ell=1}^{k} P(X = k, Y = \ell) \\ &= \sum_{\ell=1}^{k} \frac{2\ell p(1-p)^{k-1}}{k(k+1)} \\ &= \frac{2p(1-p)^{k-1}}{k(k+1)} \sum_{\ell=1}^{k} \ell \\ &= p(1-p)^{k-1} \end{aligned}$$

uitwerking (b):

$$\begin{aligned} E\left(\frac{X^2(X+1)}{Y}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\ell=1}^{k} \frac{k^2(k+1)}{\ell} \frac{2\ell p(1-p)^{k-1}}{k(k+1)} \\ &= 2\sum_{k=1}^{\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} \\ &= 2E(X^2) = \frac{4-2p}{p^2}. \end{aligned}$$

4. Zij $X_1, X_2, \cdots$ onafhankelijke Poisson verdeelde stochasten met parameter $\mu > 0$.

(a) Bepaal $P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \geq 1)$. (4 pt.)

(b) Bepaal $P(X_1 = \ell \mid X_1 + X_2 = k)$ voor $k = 0, 1, 2, \cdots$ en $\ell = 0, \cdots, k$. (7 pt.)

(c) Bepaal $E\left((X_7 + X_8)^2\right)$. (4 pt.)

uitwerking (a): Merkop dat $X_1 + \cdots + X_n$ Poisson vedeeld is met parameter $n\mu$. Dus

$$P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \geq 1) = 1 - P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 0) = 1 - e^{-n\mu}.$$

uitwerking (b): Merkop dat $X_1 + X_2$ Poisson verdeeld is met parameter 2μ. Verder, wegens onafhankelijkheid,

$$P(X_1 + X_2 = k, X_1 = \ell) = P(X_2 = k - \ell, X_1 = \ell) = P(X_2 = k - \ell)P(X_1 = \ell).$$

Dus,

$$\begin{aligned} P(X_1 = \ell \,|\, X_1 + X_2 = k) &= \frac{P(X_1 + X_2 = k, X_1 = \ell)}{P(X_1 + X_2 = k)} \\ &= \frac{P(X_2 = k - \ell)P(X_1 = \ell)}{P(X_1 + X_2 = k)} \\ &= \frac{e^{-\mu}\mu^{k-\ell}}{(k-\ell)!} \frac{e^{-\mu}\mu^{\ell}}{\ell!} \frac{k!}{e^{-2\mu}(2\mu)^k} \\ &= \binom{k}{\ell}(\frac{1}{2})^k \end{aligned}$$

uitwerking (c): De stochast $X_7 + X_8$ is Poisson verdeeld met parameter 2μ. Dus $E(X_7 + X_8) = \text{Var}(X_7 + X_8) = 2\mu$. Nu

$$E\left((X_7 + X_8)^2\right) = \text{Var}(X_7 + X_8) + \left(E(X_7 + X_8)\right)^2 = 2\mu + 4\mu^2.$$

5. Zij $n_1, n_2, \cdots, n_m \geq 0$ gehele getallen en $0 < p < 1$.
   (a) Zij $X_1, X_2, \cdots, X_m$ onafhankelijke binomiaal verdeelde stochasten met respectievelijk parameters $(n_1, p), (n_2, p), \cdots, (n_m, p)$. Laat zien dat de stochast $X_1 + X_2 + \cdots + X_m$ binomiaal verdeeld is met parameters $(n_1 + n_2, \cdots + n_m, p)$. (8 pt.)
   (b) Beschouw de stochast X_1 van onderdeel (a) met $n_1 = 123$ en $p = \frac{9}{10}$. Voor welke waarde van $k \in \{0, 1, \cdots, 123\}$ is $P(X_1 = k) = \max_{0 \leq j \leq 123} P(X_1 = j)$? (6 pt.)
   (c) Beschouw de stochast X_2 van onderdeel (a) met $n_2 = 100$ en $p = \frac{1}{10}$. Gegeven is de numerieke waarde $P(X_2 = 4) = 0{,}01587$. Druk $P(X_2 = 7)$ uit in termen van $P(X_2 = 4)$ en bepaal de numerieke waarde van $P(X_2 = 7)$. (6 pt.)

uitwerking (a): We gebruiken inductie. We beginnen met het geval $m = 2$. Beschouw het volgende experiment: werp een munt (met $P(\text{Kop}) = p$) n_1 keren en laat X_1 her aantal opgetreden koppen. Werp verder de dobbelsteen n_2 keren en laat X_2 he aantal opgetreden koppen in de laatste n_2 worpen. Dan is $X_1 + X_2$ het aantal koppen in $n_1 + n_2$ worpen. Dus is $X_1 + X_2$ binomiaal verdeeld met parameters $(n_1 + n_2, p)$. Nu stel dat $X_1 + \cdots + X_{m-1}$ binomiaal verdeeld is met parameter $(n_1 + n_2, \cdots + n_{m-1}, p)$. De stochast $X_1 + \cdots + X_m$ kan gezien worden als de som van twee onafhankelijke stochasten $Y = X_1 + \cdots + X_{m-1}$ en X_m met Y binomiaal verdeeld met parameter $(n_1 + n_2, \cdots + n_{m-1}, p)$ en X_m binomiaal verdeeld met parameter (n_m, p). Door het eerste stap zien we dat $X_1 + X_2 + \cdots + X_m$ binomiaal verdeeld is met parameters $(n_1 + n_2, \cdots + n_m, p)$.

uitwerking (b): De waarde van k waarvoor $P(X_1 = k) = \max_{0 \leq j \leq 123} P(X_1 = j)$ is gelijk aan de mode. Dus $k = \lfloor (n_1 + 1)p \rfloor = \lfloor 111.6 \rfloor = 111$.

uitwerking (c): $P(X_2 = 7) = R(7)R(6)R(5)P(X_2 = 4)$ met

$$R(k) = \frac{n_1 - k + 1}{k} \frac{p}{1-p}.$$

Dus $R(7) = \frac{94}{63} = 1,49206$, $R(6) = \frac{95}{54} = 1,75926$, $R(5) = \frac{96}{45} = 2.133333$, en $P(X = 7) = 0,088869$.

6. Zij $X_1, X_2, \cdots$ onafhankelijke Bernoulli verdeelde stochasten met parameter $0 < p < 1$. Definieer, voor $n \geq 1$, de stochast Y_n als

$$Y_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

(a) Bepaal $P\left(Y_n = \frac{k}{n}\right)$ voor $k = 0, 1, \cdots, n$. (6 pt.)

(b) Laat zien dat $\lim_{n\to\infty} P(X_1 + \cdots + X_n < 2pn) = 1$. (7 pt.)

(c) Laat zien dat $P(|Y_n - p| \geq p) \leq \frac{1-p}{np}$. (7 pt.)

uitwerking (a): Merkop dat $X_1 + \cdots + X_n$ binomiaal verdeeld is met parameters (n, p), dus

$$P\left(Y_n = \frac{k}{n}\right) = P(X_1 + \cdots + X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

uitwerking (b): We gebruiken *the law of averages* (of de zwakke wet van de grote aantallen) met $\epsilon = p$:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_1 + \cdots + X_n \geq 2pn) = \lim_{n\to\infty} P(Y_n - p \geq p) \leq \lim_{n\to\infty} P(|Y_n - p| \geq p) = 0.$$

Dus, $\lim_{n\to\infty} P(X_1 + \cdots + X_n < 2pn) = 1$.

uitwerking (c): We gebruiken Chebyshev's ongelijkheid. Merkop dat $E(Y_n) = p$ en $\mathrm{Var}(Y_n) = \frac{p(1-p)}{n}$. Dus

$$P(|Y_n - p| \geq p) = P(|Y_n - E(Y_n)| \geq p) \leq \frac{\mathrm{Var}(Y_n)}{p^2} = \frac{1-p}{np}.$$