Universiteit Utrecht 35 pt Boedapestlaan 6
Mathematisch Instituut 3584 CD Utrecht

Deeltentamen 2 Kansrekening 2011/2012

* Zet op elk blaadje dat je inlevert je naam en collegekaartnummer. Zet op het eerste blad ook de naam van je werkcollegebegeleider.

* Als je een onderdeel niet kan oplossen, ga verder met het volgende. Je mag gerust gebruik maken van wat er in de tekst van een onopgelost onderdeel staat. Geef niet alleen antwoorden, maar laat de hele redenering zien die tot het antwoord leidt.

* Punten per opgave:

opgave:	1	2	3	4	5
punten:	15	15	25	25	20

1. Zij X een continue stochast met kansdichtheid

$$f_X(x) = \begin{cases} c\sqrt{1+x} & \text{als } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

   (a) Bepaal c.

   (b) Zij $Y = (X+1)^2$. Bepaal de cumulatieve verdelingsfunctie F_Y en de kansdichtheid f_Y van Y.

2. Zij Z_1, Z_2, Z_3 onfhankelijke standaard normaal verdeelde stochasten.

   (a) Bepaal $P(\min(Z_1, Z_2, Z_3) < 0)$.

   (b) Bepaal de kansdichtheid van de stochast $W = 3Z_1 - 2Z_2 - 4Z_3$. Bereken vervolgens $P(3Z_1 - 2Z_2 < 4Z_3 + 1)$.

3. Zij X en Y onafhankelijke uniform verdeelde stochasten op het interval $(0, 1)$.

   (a) Bepaal $P(X^2 + Y^2 \leq 1 \mid Y^2 \geq X^2)$.

   (b) Bepaal $P(2X + Y \leq 2)$.

   (c) Zij $Z = 2X+Y$. Bepaal de cumulatieve vedelingsfunctie F_Z en de kansdichtheid f_Z van Z.

   (d) Bepaal $E(XZ)$.

4. Stel dat de simultane kansdichtheid van X en Y gegeven wordt door

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{x} & \text{als } 0 < y < x \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

(a) Laat zien dat X exponentieel verdeeld is met parameter $\lambda = 1$.

(b) Laat zien dat voor $x > 0$, de conditionele kansdichtheid van Y gegeven $X = x$ gegeven wordt door

$$f_Y(y|X = x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{als } 0 < y < x \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(c) Zij $x > 0$. Bereken $P(Y > 1 \,|\, X = x)$.

(d) Bereken $E(Y)$.

(e) Bepaal voor $x > 0$, de conditionele verwachting $E(e^Y \,|\, X = x)$.

5. Zij $N, X_1, X_2, X_3, \cdots$ een rij van onafhankelijke stochasten met N Poisson verdeeld met parameter $\lambda > 0$.

(a) Veronderstel dat voor $i \geq 1$, X_i geometrisch verdeeld is met parameter $0 < p < 1$. Definieer een stochast Y door

$$Y = \begin{cases} X_1 + X_2 + \cdots + X_n & \text{als } N = n, \; n \geq 1 \\ 0 & \text{als } N = 0. \end{cases}$$

Laat zien dat $E(Y \,|\, N = n) = \dfrac{n}{p}$ voor $n \geq 0$, en $E(Y) = \dfrac{\lambda}{p}$.

(b) Veronderstel nu dat X_i Bernoulli verdeeld is met parameter $0 < p < 1$ voor $i \geq 1$, en Y zoals gegeven in onderdeel (a).

(i) Bepaal $E(Y \,|\, N = n)$ voor $n \geq 0$. Bereken vervolgens $E(Y)$.

(ii) Bepaal $P(Y = k,\, N = n)$ voor $0 \leq k \leq n$ en $n \geq 0$.

(iii) Bepaal $P(Y = k)$, $k \geq 0$.