Tentamen Groepentheorie WISB221 op dinsdag 5.11.2013, 13:30 - 16:30

Universiteit Utrecht

The English version of the exam is on pages 3/4. Je kan het tentamen in het Engels of in het Nederlands maken. De opgaven staan in het Nederlands op pp. 1/2 en in het Engels op pp. 3/4.

Schrijf naam en studentennummer op ieder blad dat je inlevert. Er zijn 6 opgaven; gebruik voor iedere opgave een nieuw blad.

Geef niet enkel antwoorden, laat ook de redenering zien die tot het antwoord leidt.

Het is *niet* toegestaan rekenmachines, computers, telefoons, boeken, handouts en aantekeningen, etc. te gebruiken. Het is wel toegestaan om volgende ontbinding te gebruiken: $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$.

Notatie: voor een geheel getal n is $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ de groep van restklassen modulo n voor optelling (genoteerd als $\mathbb{Z}_n$ in het boek), en $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ is een eenhedengroep van de ring $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ (d.w.z. de restklassen modulo n die een *multiplicatief* inverse hebben).

Opgave 1.

6pt (a) Wat is het teken van de permutatie

$$\sigma := (1\,2\,3)(4\,5\,6)\cdots(2008\,2009\,2010)(2011\,2012\,2013)$$

in S_{2013}?

6pt (b) Schrijf de permutatie $(1\,2\,3)(1\,3)(1\,3\,2)(1\,2)$ uit S_3 als product van disjuncte cykels.

6pt (c) Schrijf de diëdergroep D_7 als $\{e, r, \dots, r^6, s, sr, \dots, sr^6\}$ voor $r, s \in D_7$ met $r^7 = s^2 = e$ en $rsr = s$. Welke van deze 14 elementen is $r^5 s^{11} r^{2013}$?

Opgave 2. Bewijs of weerleg:

6pt (a) De groep $(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})^* \times (\mathbf{Z}/6\mathbf{Z})^*$ is cyclisch.

6pt (b) Er bestaat een groep G en een niet-triviaal homomorfisme $\varphi\colon G \to \mathbf{Z}/2013\mathbf{Z}$ van G naar de cyclische groep met 2013 elementen waarvan het beeld precies $3 \cdot 61$ elementen heeft ("niet-triviaal" betekent dat $\varphi(G) \neq \{e\}$).

6pt (c) Er bestaat een enkelvoudige groep van orde 2013.

6pt (d) De groep $SO_3(\mathbf{R})$ bevat oneindig veel elementen van eindige orde.

[Zie ommezijde]

10pt **Opgave 3.** Gegeven is een groepshomomorfisme $\varphi\colon G \to H$. Toon aan dat de afbeelding

$$\begin{aligned} \psi\colon G/\ker\varphi &\to H \\ g\ker\varphi &\mapsto \varphi(g) \end{aligned}$$

welgedefinieerd is.

10pt **Opgave 4.** Bewijs dat de ondergroep van S_4 voortgebracht door (13) en (1234) isomorf is met D_4.

Opgave 5. Stel dat G een eindige groep is met n elementen, en dat H een ondergroep van G is met m elementen. Beschouw de volgende twee uitspraken:

U: H is de unieke ondergroep van G met m elementen.
N: H is een normaaldeler in G.

(a) Bewijs of weerleg de volgende uitspraken:

6pt (a1) **U** impliceert **N**;

6pt (a2) **N** impliceert **U**.

6pt (b) Als m onderling ondeelbaar is met de index $[G : H] = n/m$, bewijs dan dat **U** geldt dan en slechts dan als **N** geldt (twee getallen zijn "onderling ondeelbaar" als hun grootste gemene deler 1 is).

Opgave 6.

10pt (a) Toon aan dat het aantal elementen van iedere conjugatieklasse van een eindige groep G een deler is van het aantal elementen van G.

10pt (b) Bepaal alle groepen met precies drie conjugatieklassen.

[Einde]

Group Theory Exam WISB221 on Tuesday 5 Nov 2013, 13:30 - 16:30

Universiteit Utrecht

De Nederlandse versie van het tentamen staat op pagina 1/2. You can do the exam in Dutch or in English. The questions are displayed in Dutch on page 1/2 and in English on page 3/4.

Write your name and student number on every solution page that you hand in. There is a total of 6 exercises; use a new page for every exercise.

Don't just provide the answer, but also show the reasoning that leads to the answer.

You are *not* allowed to use calculators, computers, phones, books, handouts and notes, etc. You are allowed to use the following factorisation: $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$.

Notation: for an integer n, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ is the additive group of residue classes modulo n (denoted $\mathbb{Z}_n$ in the book), and $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ is the group of units of the ring $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ (i.e., the residue classes modulo n that have a *multiplicative* inverse).

Exercise 1.

6pt (a) What is the sign of the permutation

$$\sigma := (1\,2\,3)(4\,5\,6)\cdots(2008\,2009\,2010)(2011\,2012\,2013)$$

in S_{2013}?

6pt (b) Rewrite the permutation $(1\,2\,3)(1\,3)(1\,3\,2)(1\,2)$ from S_3 as a product of disjoint cycles.

6pt (c) Representing the dihedral group D_7 as $\{e, r, \ldots, r^6, s, sr, \ldots, sr^6\}$ for $r, s \in D_7$ with $r^7 = s^2 = e$ and $rsr = s$, which of these 14 elements is $r^5 s^{11} r^{2013}$?

Exercise 2. Prove or disprove:

6pt (a) The group $(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})^* \times (\mathbf{Z}/6\mathbf{Z})^*$ is cyclic.

6pt (b) There exists a group G and a non-trivial homomorphism $\varphi\colon G \to \mathbf{Z}/2013\mathbf{Z}$ from G to the cyclic group with 2013 elements whose image contains exactly $3 \cdot 61$ elements ("non-trivial" means that $\varphi(G) \neq \{e\}$).

6pt (c) There exists a simple group of order 2013.

6pt (d) The group $SO_3(\mathbf{R})$ contains infinitely many elements of finite order.

[Please turn over]

10pt **Exercise 3.** You are given a group homomorphism $\varphi\colon G \to H$. Prove that the map

$$\begin{aligned} G/\ker\varphi &\to H \\ g\ker\varphi &\mapsto \varphi(g) \end{aligned}$$

is well-defined.

10pt **Exercise 4.** Prove that the subgroup of S_4 generated by (13) and (1234) is isomorphic to D_4.

Exercise 5. let G denote a finite group with n elements and H a subgroup of G with m elements. Consider the following two statements:

U: H is the unique subgroup of G with m elements.
N: H is a normal subgroup of G.

(a) Prove or disprove the following statements:

6pt (a1) **U** implies **N**;

6pt (a2) **N** implies **U**.

6pt (b) If m is coprime to the index $[G : H] = n/m$, prove that **U** holds if and only if **N** holds (two integers are “coprime” if their greatest common divisor is 1).

Exercise 6.

10pt (a) Prove that the number of elements of every conjugacy class of a finite group G divides the order of G.

10pt (b) Determine all groups that have exactly three conjugacy classes.

[The End]