Ringen en Galoistheorie, deel 2

28 juni 2012, 9-12 uur

- Bij dit tentamen mag het dictaat niet gebruikt worden.
- Schrijf op elk vel je naam, studnr en naam practicumleider.
- Belangrijk: laat bij elke opgave zien hoe je aan je antwoord komt!!
- Veel succes!

OPGAVEN

1. Zijn de volgende uitspraken goed of fout? Verklaar je antwoord.

   (a) (5 pt) Stel L/K is een Galoisuitbreiding en M een tussenlichaam, dat wil zeggen $K \subset M \subset L$. Dan is L/M een Galoisuitbreiding.

   (b) (5 pt) Stel L/K is een Galoisuitbreiding en M een tussenlichaam, dus $K \subset M \subset L$. Dan is M/K een Galoisuitbreiding.

   (c) (5 pt) Stel L is het splijtlichaam van een irreducibel polynoom $f \in K[X]$ van graad n. Zij M een tussenlichaam, Galois over K, zó dat $L = M(\alpha)$ voor een nulpunt α van f. Dan is $[L : M]$ een deler van n.

   (d) (7 pt) Het aantal tussenlichamen van de uitbreiding $\mathbb{F}_{64}/\mathbb{F}_2$ (inclusief $\mathbb{F}_{64}$ en $\mathbb{F}_2$ zelf) is gelijk aan 6.

   (e) (5 pt) Elke eindige uitbreiding van $\mathbb{F}_p$ (p priem) is een Galois uitbreiding met cyclische Galoisgroep.

2. Beschouw het polynoom $f = X^6 - tX^3 + t \in \mathbb{Q}(t)[X]$ in de variabelen X, t en zij L het splijtlichaam van f over het grondlichaam $\mathbb{Q}(t)$.

   (a) (5 pt) Bewijs dat f irreducibel in $\mathbb{Q}(t)[X]$ is.

   (b) (5 pt) Stel dat $\alpha \in L$ een nulpunt is van f, dat wil zeggen: $\alpha^6 - t\alpha^3 + t = 0$. Laat zien dat $\omega\alpha$ en $t^{1/3}/\alpha$ ook nulpunten van f zijn (hierin is $\omega^3 = 1, \omega \neq 1$.

   (c) (5 pt) Bewijs dat $L = \mathbb{Q}(\alpha, \omega, t^{1/3})$.

   (d) (7 pt) Bepaal de Galois groep en de deellichamen van de uitbreiding $\mathbb{Q}(\omega, t^{1/3})/\mathbb{Q}(t)$.

   (e) (5 pt) Bewijs dat $\mathbb{Q}(t, \alpha^3) = \mathbb{Q}(t, \sqrt{t^2 - 4t})$ door $f = 0$ op te lossen in X^3. Waarom geldt nu dat $\alpha \notin \mathbb{Q}(\omega, t^{1/3})$?

   (f) (7 pt) Bewijs dat $[L : \mathbb{Q}(t)]$ gelijk is aan $12, 18$ of 36.

   (g) (5 pt) Er is nu gegeven dat $[L : \mathbb{Q}(t)] = 36$. Laat zien dat er elementen $\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(\omega, t^{1/3})$ bestaan, zó dat $\tau(\alpha) = t^{1/3}/\alpha$ en $\sigma(\alpha) = \omega\alpha$.

3. In de volgende onderdelen mag je gebruiken dat elke kwadratische uitbreiding van een lichaam K (van karakteristiek $\neq 2$) van de vorm $K(\sqrt{\alpha})$ is met $\alpha \in K$.

(a) (7 pt) Zij K een lichaam van karakteristiek $\neq 2$ en $\alpha, \beta \in K^*$. Bewijs dat $K(\sqrt{\alpha}) \cong K(\sqrt{\beta})$ precies dan als er $\gamma \in K$ bestaat zó dat $\alpha = \beta\gamma^2$.

In de volgende onderdelen nemen we $K = \mathbb{Q}(i)$ met $i = \sqrt{-1}$. Kies $a, b \in \mathbb{Q}$, stel dat $a + bi$ geen kwadraat is $\mathbb{Q}(i)$ is, en definieer $L = \mathbb{Q}(i, \sqrt{a + bi})$.

(b) (3+3 pt) Bewijs dat $L/\mathbb{Q}$ Galois is met Galoisgroep V_4 (Viergroep van Klein) precies dan als L een deellichaam van de vorm $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ bevat, met $d \in \mathbb{Z}$ en niet van de vorm $\pm m^2$ met $m \in \mathbb{Z}$.

(c) (4+4 pt) Bewijs dat $L/\mathbb{Q}$ Galois is precies dan als er $c \in \mathbb{Q}$ bestaat, zó dat $a^2 + b^2 = c^2$.

(d) (5 pt) Geef alle groepen van orde 4 (op isomorfie na).

In de volgende opgaven mag je gebruiken dat als $a^2 + b^2$ een kwadraat in $\mathbb{Q}$ is, er $r \in \mathbb{Q}, \gamma \in \mathbb{Q}(i)$ en $\mu \in \{\pm 1, \pm i\}$ bestaan, zó dat $a + bi = r\mu\gamma^2$.

(e) (5 pt) Bewijs dat er $r \in \mathbb{Q}$ en $\mu \in \{\pm 1, \pm i\}$ bestaan, zó dat $L = \mathbb{Q}(i, \sqrt{r\mu})$.

(f) (5 pt) Bewijs dat er geen cyclische Galoisuitbreidingen van $\mathbb{Q}$ van graad 4 bestaan, die $\mathbb{Q}(i)$ als deellichaam bevatten.