

## Ringen en Galoistheorie, deel 2

27 juni 2013, 9-12 uur

### OPGAVEN

1. Beantwoord de volgende korte vragen en geef een motivatie:
  - (a) (5 pt) Waar of niet waar: Stel  $L/K$  is een Galoisuitbreiding en  $M$  een tussenlichaam, dat wil zeggen  $K \subset M \subset L$ . Dan is  $L/M$  een Galoisuitbreiding.
  - (b) (5 pt) Waar of niet waar: Stel  $L/K$  is een Galoisuitbreiding en  $M$  een tussenlichaam, dus  $K \subset M \subset L$ . Dan is  $M/K$  een Galoisuitbreiding.
  - (c) (4+4 pt) Welk van de volgende groepen kunnen voorkomen als Galoisgroep van het splijtlichaam van een vierde graads polynoom:
    - i.  $C(2) \times C(2) \times C(2)$  ( $C(2)$  is de cyclische groep van 2 elementen).
    - ii. De diedergroep van orde 8.
  - (d) (5 pt) Bewijs dat  $x^3 - x - 1$  irreducibel in  $\mathbb{Q}[x]$  is.
  - (e) (11 pt) Zij  $\alpha$  een nulpunt van  $x^3 - x - 1$ . Bepaal het inverse element van  $\alpha + 2$  in  $\mathbb{Q}(\alpha)$ .
  - (f) (8 pt) Bepaal het aantal tussenlichamen van de uitbreiding  $\mathbb{F}_{3^{10}}/\mathbb{F}_3$  (inclusief  $\mathbb{F}_{3^{10}}$  en  $\mathbb{F}_3$  zelf)
  - (g) (8 pt) Zij  $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$  een irreducibel polynoom van graad  $r$ . Zij  $\alpha$  een nulpunt van  $f$  en  $K = \mathbb{F}_p(\alpha)$ . Zij  $\phi : K \rightarrow K$  het automorfisme gegeven door  $\phi : \beta \mapsto \beta^p$  voor alle  $\beta \in \mathbb{F}_p(\alpha)$ . Bewijs dat de verzameling nulpunten van  $f$  gegeven wordt door  $\alpha, \phi(\alpha), \dots, \phi^{r-1}(\alpha)$ .
2. NB: Als je in de volgende vragen een onderdeel gemist heb dan kun je het resultaat ervan toch gebruiken in de daaropvolgende onderdelen.

We bekijken de uitbreiding  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$  van  $\mathbb{Q}$ .

  - (a) (5 pt) Bewijs dat  $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = 4$ .
  - (b) (5 pt) Bewijs dat  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}$  een Galois uitbreiding is en laat zien dat er elementen  $\sigma, \tau \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q})$  zijn met de eigenschap
$$\sigma(\sqrt{3}) = \sqrt{3}, \sigma(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}, \tau(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}, \tau(\sqrt{5}) = \sqrt{5}.$$
  - (c) (5 pt) Met welke groep van vier elementen is  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q})$  isomorf?

Z.O.Z.

Stel  $\alpha = \sqrt{(2 - \sqrt{3})(5 - 2\sqrt{5})}$ . We gaan allereerst laten zien dat  $\alpha$  graad 8 over  $\mathbb{Q}$  heeft.

(d) (5+5 pt) Zij  $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q})$  als boven en stel dat  $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{3})$ . We gaan een tegenspraak afleiden.

i. Laat zien dat  $\sigma(\alpha) = \epsilon\sqrt{5}(2 - \sqrt{3})/\alpha$  met  $\epsilon \in \{-1, 1\}$  (Hint: bepaal  $\sigma(\alpha^2)$ ).

ii. Laat vervolgens zien dat  $\sigma^2(\alpha) = -\alpha$ .

(e) (5 pt) Laat zien dat uit voorgaand onderdeel volgt dat  $\alpha \notin \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$  en concludeer dat  $\alpha$  graad 8 over  $\mathbb{Q}$  heeft.

(f) (5 pt) Laat zien dat de nulpunten van het minimaalpolynoom van  $\alpha$  geschreven kunnen worden als

$$\pm\alpha, \pm\sqrt{5}/\alpha, \pm\sqrt{5}(2 - \sqrt{3})/\alpha, \pm(5 - 2\sqrt{5})/\alpha.$$

(Hint: ze komen van  $\pm\sqrt{(2 \pm \sqrt{3})(5 \pm 2\sqrt{5})}$ ).

(g) (5+10 pt) Laat zien dat  $\mathbb{Q}(\alpha)$  een Galois uitbreiding van  $\mathbb{Q}$  is en bepaal de Galoisgroep.