Eerste deeltentamen Functies en Reeksen

10 november 2011, 9:00 - 12:00 uur

- Schrijf op ieder vel **je naam** en bovendien op het eerste vel je **studentnummer**, de naam van je **practicumleider** (Jan Jitse Venselaar, Wouter Stekelenburg) en het **aantal ingeleverde vellen**.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.
- Alle 5 opgaven tellen even zwaar.

Succes !

Opgave 1 We beschouwen de functies $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd door

$$f(x, y) = (1 + x - y + xy)^4, \qquad c(t) = (t^2, t - t^3).$$

(a) Toon aan dat de functie $f \circ c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differentieerbaar is.

(b) Bepaal de afgeleide

$$(f \circ c)'(1).$$

Opgave 2 Toon aan dat er geen C^2-functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bestaat met

$$\text{grad } f\ (x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x^2 \end{pmatrix}$$

voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Hint: beschouw hogere orde afgeleiden van f.

z.o.z.

Opgave 3 We beschouwen een functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die totaal differentieerbaar is in de oorsprong 0. Bewijs dat de functie $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$g(x) = f(x) + (x_1 - x_n)\|x\|$$

ook totaal differentieerbaar is in 0 en druk $Dg(0)$ uit in $Df(0)$.

Opgave 4 We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}\times]0,\infty[\to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x,t) = \frac{e^{-t}\cos(xt)}{\sqrt{t}}.$$

(a) Toon aan dat de functie $t \mapsto f(x,t)$ oneigenlijk integreerbaar is over $]0,1]$, voor iedere $x \in \mathbb{R}$.

(b) Toon aan dat de functie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$F(x) := \int_0^1 \frac{e^{-t}\cos(xt)}{\sqrt{t}}\,dt$$

continu is.

(c) We beschouwen nu de integraal over het grotere interval $]0,\infty[$. Toon aan dat door

$$G(x) := \int_0^\infty \frac{e^{-t}\cos(xt)}{\sqrt{t}}\,dt$$

een continue functie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd wordt.

Opgave 5 We beschouwen de rij functies $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ gedefinieerd door

$$f_n(x) = \frac{n}{ne^x + 1}.$$

(a) Toon aan dat de rij (f_n) puntsgewijs convergent is op $\mathbb{R}$ met puntsgewijze limiet $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = e^{-x}$.

(b) Toon aan dat de rij (f_n) uniform convergent is op $[a,\infty[$ voor elke $a \in \mathbb{R}$.

(c) Is de rij (f_n) uniform convergent op $\mathbb{R}$? Bewijs de juistheid van uw bewering.