Tweede deeltentamen Functies en Reeksen

17 januari 2013, 9:00 - 12:00 uur

- Schrijf op ieder vel **je naam** en bovendien op het eerste vel je **studentnummer**, de naam van je **practicumleider** (Arjen Baarsma, Joao Mestre) en het **aantal ingeleverde vellen**.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je aan die antwoorden gekomen bent.
- **N.B.** Als je een stelling uit het dictaat gebruikt, vermeld dat dan en laat ook expliciet zien dat de voorwaarden van die stelling vervuld zijn.
- **N.B.** Als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken, **ga dan toch door met de volgende onderdelen.** Je mag daarbij de in eerdere onderdelen verschafte informatie gebruiken.
- Rekenmachine, diktaat en aantekeningen mogen niet worden gebruikt.
- Met Opgaven 1,2,3 en 4 (a)-(d) zijn elk 10 punten te verdienen. Met 4 (e),(f) kunnen bovendien 5 extra punten verdiend worden.

Succes !

Opgave 1 Bepaal de convergentiestraal van elk van de volgende machtreeksen:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n^2+1}$, (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} ([i+1]^n+1)\, z^n$,

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{(n+1)^n}$, (d) $\displaystyle\sum_{n\geq 5} (1+in)^2 z^{2n}$.

Opgave 2 We beschouwen de open deelverzameling $V = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ van $\mathbb{C}$. Voor iedere $R > 0$ definiëren

$$V(R) := \{z \in V \mid |z| < R\}.$$

Voor iedere $k \in \mathbb{N}$ definiëren we de functie $f_k : V \to \mathbb{C}$ door $f_k(z) = 1/(z^2 - k^2)$.

(a) Zij $n \in \mathbb{N}$. Toon aan de supnorm van f_k over $V(n)$ voor $k \geq n+1$ geschat kan worden door

$$\|f_k\|_{V(n)} \leq \frac{1}{k^2 - n^2}.$$

(b) Toon aan dat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ de reeks $\sum_{k\geq n+1} f_k$ uniform convergeert op $V(n)$.

(c) Bewijs dat door

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) \qquad (*)$$

een continue functie $V \to \mathbb{C}$ gedefinieerd wordt. **Z.O.Z**

(d) Toon aan dat de reeks (*) niet uniform convergeert op V.

Opgave 3 We beschouwen de 2π-periodieke functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die op $[-\pi, \pi]$ gedefinieerd is door:

$$f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

(a) Bepaal $c_k = (\mathcal{F} f)_k$ voor elke $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Toon aan dat er reële constanten a_k, $(k \geq 0)$, bestaan zo dat

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx.$$

waarbij de gevonden reeks uniform convergeert.

(c) Bepaal

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}.$$

Opgave 4 In het vervolg gebruiken we de notatie $C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ voor de ruimte van 2π-periodieke stuksgewijze C^1 functies $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. U mag gebruiken dat het kwadraat integraal inproduct

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx, \qquad (f, g \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}))$$

een positief definiet Hermites inproduct op de ruimte $C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ definieert.

(a) Geef een voorbeeld van een niet-continue functie die tot $C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ behoort.

(b) Laat zien dat voor alle $g \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ geldt dat

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|\, dx \leq \|g\|_2.$$

Hierin is $\|g\|_2$ de kwadraat-integraalnorm van g.
Hint: pas de Cauchy-Schwartz ongelijkheid toe op $\langle f, |g| \rangle$ voor een geschikte f.

In het vervolg veronderstellen we dat $f, g \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

(c) Toon aan dat

$$\|f * g\|_{\mathbb{R}} \leq \|f\|_{\mathbb{R}} \|g\|_2.$$

De symmetrische partiële Fourier som $s_{f,n}$ van een functie $f \in C^{\mathrm{st},1}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ is gedefinieerd door

$$s_{f,n}(x) = \sum_{k=-n}^{n} (\mathcal{F} f)_k e^{ikx}$$

(d) Bewijs dat $f * s_{g,n} \to f * g$ uniform op $\mathbb{R}$, voor $n \to \infty$.

Met de volgende onderdelen kunnen bonuspunten verdiend worden.

(e) Bewijs dat $f * s_{g,n} = s_{(f*g),n}$, $(n \in \mathbb{N})$.

(f) Bewijs dat $f * g$ continu is.