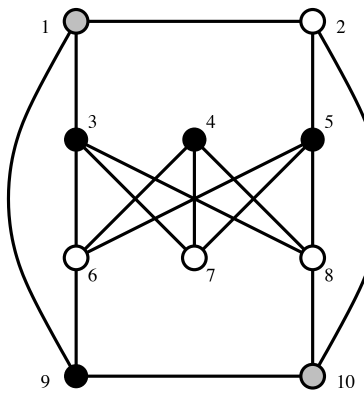
Discrete modellen in de toegepaste wiskunde (WISB136) Uitwerkingen van het hertentamen.

Docent: Rob H. Bisseling, Universiteit Utrecht

31 mei 2012.

1. (a) De graaf kan zó getekend worden. Hierbij beginnen we te tekenen met het 3×3 blok in de verbindingsmatrix dat zich bevindt in rijen 3,4,5 en kolommen 6,7,8.



   (b) Deze graaf is niet planair want hij bevat de complete bipartiete graaf $K_{3,3}$ als deelgraaf, gegeven door de knopen 3,4,5 en 6,7,8.

   (c) Een kleuring van de knopen met drie kleuren (wit, grijs, zwart) is weergegeven in de tekening. Knopen 2,6,7,8 zijn hierbij wit, knopen 1, 10 zijn grijs en 3,4,5,9 zijn zwart.

   Een kleuring met minder kleuren kan niet. Immers, met één kleur lukt het niet omdat knopen 1 en 2 verschillende kleuren moeten hebben vanwege de zijde (1,2).

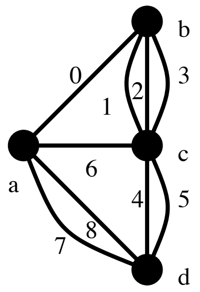
   Met twee kleuren kan het ook niet. Stel we gebruiken hiervoor de kleuren zwart en wit. We mogen zonder verlies van algemeenheid aannemen dat knoop 3 zwart gekleurd is. Dan moeten de knopen 6 en 8 wit gekleurd worden, vanwege de zijden (3,6) en (3,8). Dit heeft als gevolg dat de knopen 9 en 10 zwart gekleurd moeten worden, vanwege de zijden (6,9) en (8,10). Echter, knopen 9 en 10 zijn buren en mogen dus niet dezelfde kleur hebben. Tegenspraak. Er zijn dus minstens drie kleuren nodig.

2. (a) Stel G heeft wel een snijzijde, zeg $e = xy$ zodat door weglating van e twee componenten ontstaan, C_x van x en C_y van y. Maak een pad in G dat start in x en dat begint met e te doorlopen. Omdat elke knoop van G een even graad heeft, kan het pad in elke bezochte knoop verlengd worden, behalve in x. Het pad moet dus een cykel zijn. Er is dus nog een verbinding tussen C_x en C_y, en e is dus geen snijzijde. Tegenspraak.

   (b) Stel $v \in V$ met graad $d(v)$ heeft k lussen, en dus $r = d(v) - 2k$ zijden die geen lussen zijn. Merk op dat v via meerdere parallelle zijden met dezelfde buur verbonden kan zijn. Als we v en al zijn zijden weglaten, ontstaan er componenten van $G-v$. Voor elke component C van $G-v$ moeten er minstens twee zijden zijn in G die v verbinden met C. Immers, als er maar één zo'n zijde was, dan zou dit een snijzijde van G zijn, en die bestaat niet volgens opgave (a). Er geldt dus $2c(G-v) \leq r \leq d(v)$, zodat $c(G-v) \leq d(v)/2$.

(c) Beide grafen zijn samenhangend. De linkergraaf is niet even, want knoop a heeft een oneven graad, nl. 3. Ook b, c, d hebben oneven graad. Dit is de graaf van het Köningsberger bruggenprobleem. De rechtergraaf is wel even, want knopen a, b, d hebben graad 4, en knoop c heeft graad 6, zodat alle knopen een even graad hebben.

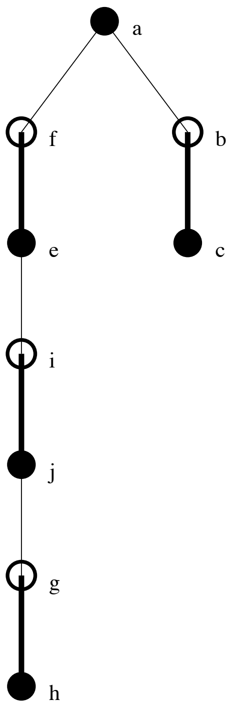
(d) De linkergraaf is niet Eulers, want hij is niet even. Er bestaat dus geen Eulertoer. De rechtergraaf is wel Eulers, en een Eulertoer is $a0b1c2b3c4d5c6a7d8a$, aangegeven via de volgende nummering van de zijden.



3. (a) Een M-augmenterend pad is een pad $v_1 v_2 \cdots v_r$ met v_1 en v_r ongematcht, $v_i v_{i+1} \in M$ voor even i en $v_i v_{i+1} \in E \backslash M$ voor oneven i.

(b) Een APS-boom met wortel u is een boom T met wortel u en zijden uit E waarvan alle knopen behalve u gematcht zijn door een match in $M \cap E(T)$ en die niet verder uitgebreid kan worden met zijden uit E.

(c) Er zijn geen augmenterende paden vanuit a, want de enige alternerende paden vanuit a zijn $afeijgh$ en $abcfeijgh$, en beide eindigen in een gematchte knoop, h. Een APS-boom met wortel a kan gemaakt worden door achtereenvolgens de zijden af, fe, ab, bc, ei, ij, jg en gh toe te voegen (de boom is niet uniek.) De resulterende boom is:



4. Zij $G = (V, E)$ een samenhangende acyclische graaf met $E \neq \emptyset$.

   (a) (8 pnt) We bewijzen dit met volledige inductie naar $m = |E|$, het aantal zijden van de graaf.

   Als $m = 1$, dan is er precies één zijde uv met $u, v \in V$. Omdat de graaf acyclisch is, kan de zijde geen lus zijn en dus is $u \neq v$. Er geldt $d(u) = d(v) = 1$, met $d(u)$ de graad van u. Er zijn dus twee knopen met graad 1 en de stelling klopt.

   Als $m > 1$, dan kies een zijde $e = uv$ en laat deze zijde weg uit de graaf. (Geen enkele zijde is een lus, dus e ook niet.) We krijgen een graaf $G' = G \backslash e$ met $m - 1$ zijden. Deze graaf G' is acyclisch, net als G, want er kunnen door weglating geen nieuwe cykels ontstaan. Echter de nieuwe graaf is niet samenhangend en heeft dus meer dan 1 component: als deze samenhangend zou zijn dan zou er een pad van u naar v zijn in G', dat via e uit te breiden zou zijn tot een cykel in G, tegenspraak. De nieuwe graaf heeft precies 2 componenten, namelijk de component C_u van u en C_v van v. Een extra component kan niet, want dan zou deze niet met u en v verbonden kunnen zijn, zelfs niet als we e er weer bij voegen.

   Als C_u geen zijden heeft, dan is $d(u) = 1$ in G. Als C_u wel een zijde heeft, dan geldt de inductieveronderstelling voor C_u want deze is samenhangend, acyclisch, heeft tenminste 1 zijde en heeft minder dan m knopen. Er zijn dus tenminste 2 knopen met graad 1 in C_u. Eén ervan is ongelijk aan u, en houdt dus graad 1 als we e toevoegen. We krijgen zo een knoop met graad 1 in G. Net zo kunnen we een knoop uit C_v vinden met graad 1 in G. We hebben dus twee knopen gevonden in G met graad 1, en zijn hiermee dus klaar.

   (b) (2 pnt) Zo'n graaf heet een *niet-triviale boom* en knopen met graad 1 heten *bladeren.*

5. (a) Het algoritme van Dijkstra voor het vinden van een kortste pad vanuit een startpunt S $\in V$ in een gerichte graaf $G = (V, E)$ is als volgt. Neem aan dat er een directe verbinding bestaat met lengte $l(v, w) \geq 0$ voor elke zijde van v naar w. Dit algoritme berekent de kortste afstand $\mathit{dist}(v)$ van S naar elke knoop $v \in V$ en dus ook naar T. Voor elke knoop v wordt ook de huidige voorganger $\mathit{pred}(v)$ opgeslagen. D is de verzameling knopen waarvoor we de kortste afstand al gevonden hebben.

   for all $v \in V$ **do**
       $\mathit{dist}(v) \leftarrow \infty$; $\mathit{pred}(v) \leftarrow v$;
   $\mathit{dist}(S) \leftarrow 0$;
   $D \leftarrow \emptyset$;
   while $D \neq V$ **do**
       zoek $v \in V \backslash D$ met minimale $\mathit{dist}(v)$;
       $D \leftarrow D \cup \{v\}$;
       for all $w \in V \backslash D \;:\; (v, w) \in E$ **do**
           if $\mathit{dist}(v) + l(v, w) < \mathit{dist}(w)$ **then**
               $\mathit{dist}(w) \leftarrow \mathit{dist}(v) + l(v, w)$;
               $\mathit{pred}(w) \leftarrow v$;

   (b) Het algoritme voor deze graaf werkt als volgt. Merk op dat in onze notatie D (cursief) een verzameling steden is, en D een stad.

   S heeft minimale afstand 0. $D = \{\text{S}\}$, $\mathit{dist}(\text{A}) = 4$, $\mathit{pred}(\text{A}) = \text{S}$, $\mathit{dist}(\text{C}) = 6$, $\mathit{pred}(\text{C}) = \text{S}$, $\mathit{dist}(\text{E}) = 2$, $\mathit{pred}(\text{E}) = \text{S}$.

   E heeft minimale afstand 2. $D = \{\text{S, E}\}$, $\mathit{dist}(\text{C}) = 2 + 3 = 5$, $\mathit{pred}(\text{C}) = \text{E}$, $\mathit{dist}(\text{F}) = 2 + 5 = 7$, $\mathit{pred}(\text{F}) = \text{E}$.

A heeft minimale afstand 4. $D = \{$S, E, A$\}$, dist(B) = 4 + 4 = 8, pred(B) = A.

C heeft minimale afstand 5. $D = \{$S, E, A, C$\}$, dist(D) = 5 + 2 = 7, pred(D) = C, dist(F) = 5 + 1 = 6, pred(F) = C.

F heeft minimale afstand 6. $D = \{$S, E, A, C, F$\}$, dist(T) = 6 + 3 = 9, pred(T) = F.

D heeft minimale afstand 7. $D = \{$S, E, A, C, F, D$\}$.

B heeft minimale afstand 8. $D = \{$S, E, A, C, F, D, B$\}$.

T heeft minimale afstand 9. Dit is de lengte van de gevraagde kortste route. De route zelf krijgen we door via de voorgangers terug te gaan naar S: pred(T) = F, pred(F) = C, pred(C) = E, pred(E) = S. De route is dus SECFT.