

Discrete modellen in de toegepaste wiskunde (WISB136)

Tentamen.

Docent: Rob H. Bisseling, Universiteit Utrecht

16 april 2012. Tijd 13.30 - 16.30 uur

Elke vraag is 10 punten waard. Totaal aantal te behalen punten is 50. Tijd 180 minuten. Je mag geen rekenmachine, boeken, of aantekeningen gebruiken. Motiveer je antwoorden. Veel succes!

1. We willen een zo groot mogelijk aantal torens op een 8×8 schaakbord plaatsen zonder dat ze elkaar slaan. Dit betekent dat er ten hoogste één toren in elke rij mag staan en ten hoogste één toren in elke lijn (kolom). We mogen niet het hele schaakbord gebruiken; slechts op de velden (zoals a1) aangegeven met een kruisje '×' mogen we een toren plaatsen:

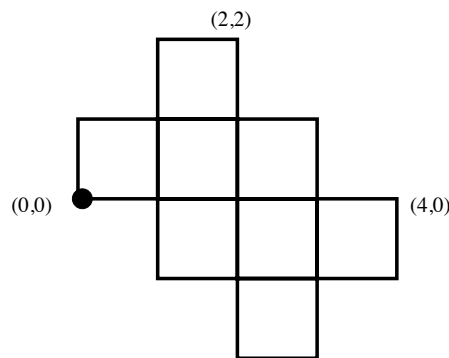
8	×						×	
7			×				×	
6			×		×		×	
5			×	×		×		
4			×	×		×		
3			×			×		
2	×				×	×		
1	×	×						
	a	b	c	d	e	f	g	h

- (a) (3 pnt) Formuleer dit probleem als een grafenprobleem.
 - (b) (7 pnt) Los het probleem op. Motiveer waarom je oplossing inderdaad het maximum aantal torens plaatst.
2. (a) (4 pnt) Formuleer het Breadth-First Search algoritme om een BFS-boom te maken voor een graaf $G = (V, E)$ en een gegeven wortel $r \in V$ (En: *root*). De enige benodigde output is de boom zelf. Leg de betekenis van de gebruikte variabelen uit.
 - (b) (2 pnt) Stel de graaf G is gegeven door de volgende verbindingsmatrix (En: *adjacency matrix*):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

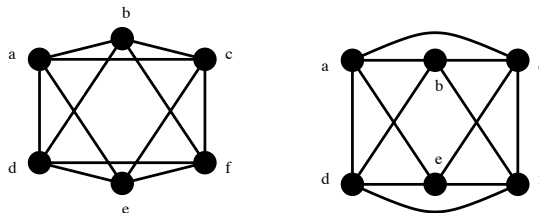
Teken de bijbehorende graaf. Noem de knopen a, b, c, \dots, j (in de volgorde van de matrixrijen/kolommen).

- (c) (4 pnt) Maak met behulp van het BFS algoritme een BFS-boom voor deze graaf met wortel a . Laat hierbij op elk moment zien welke knopen in je datastructuur opgeslagen zijn.
3. Een boom (En: *tree*) is een acyclische samenhangende graaf.
- (a) (2 pnt) Geef de definitie van een samenhangende graaf.
- (b) (2 pnt) Geef de definitie van een acyclische graaf.
- (c) (6 pnt) Bewijs met volledige inductie dat voor elke boom $T = (V, E)$ geldt dat $|E| = |V| - 1$.
4. (a) (2 pnt) Geef de definitie van een Eulerse graaf.
- (b) (2 pnt) Bestaat er een Eulerse graaf met een even aantal knopen en een oneven aantal zijden? Zo ja, geef een voorbeeld. Zo nee, beredeneer dit.
- (c) (6 pnt) Is de volgende graaf Eulers? Zo ja, geef een Eulertoer beginnend in knoop $(0,0)$. Zo nee, beredeneer dat er geen Eulertoer bestaat.



In deze graaf hebben alle zijden lengte 1, en is er een knoop op alle aangegeven roosterpunten (bijv. $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ etc., totaal 17 knopen).

5. (a) (tweemaal 3 pnt) Teken een planaire inbedding van de volgende twee grafen als deze bestaat, en anders motiveer waarom deze niet bestaat.



- (b) (tweemaal 2 pnt) Geef voor beide grafen een kleuring van de knopen met het minimale aantal kleuren.