Tentamen Infi B

16 april 2013, 13.30-16.30

- Zet op elk blad dat je inlevert je naam en nummer.
- Schrijf op het eerst blad de naam van je werkcollegebegeleider (Wilfred de Graaf, Jan van Zweeden, Sanjay Ramawadh of Sebastian Klein).
- Laat bij elk antwoord zien hoe je er aan bent gekomen.
- Het gebruik van een rekenmachine of ander zelf meegebracht materiaal is niet toegestaan.

Opgave 1 (15 pt)
Beschouw de machtreeks

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n$$

(a) Geef de convergentiestraal van deze machtreeks. (5 pt)

(b) Geef een functie $f(x)$ zodat bovenstaande machtreeks de Taylorreeks is van $f(x)$. (10 pt)

Opgave 2 (20 pt)
Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ het gebied dat begrensd wordt door $x^2 + 2y^2 + (z-2)^2 = 4$ en waarvoor $z \geq 2$.

(a) Geef een parametrisatie van V, en het domein van deze parametrisatie, in termen van bolcoördinaten ("spherical coordinates"). (5 pt)

(b) Bereken

$$\hat{x} = \int\int\int_V x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,, \quad \hat{y} = \int\int\int_V y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,, \quad \hat{z} = \int\int\int_V z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

(15 pt)

Opgave 3 (20 pt)
Zij $E \subset \mathbb{R}^2$ het gebied gedefinieerd door: $x, y \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 2$ en $x \geq y$. De rand van E noemen we $\mathcal{K}$.
Gegeven is verder het vectorveld

$$\mathbf{G}(x, y) = xy(3x - y)\mathbf{i} + x^2(x + y)\mathbf{j}$$

(a) Teken E. (5 pt)

(b) Bereken de lijnintegraal

$$\int_{\mathcal{K}} \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}\,,$$

waarbij $\mathcal{K}$ tegen de klok in wordt doorlopen. (15 pt)

Opgave 4 (45 pt)
Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ het gebied gedefinieerd door: $x, z \geq 0$, $0 \leq y \leq 1$ en $x + z \leq 1$. De rand van V noemen we $\mathcal{S}$, met een naar buiten gerichte normaal. Het gedeelte van $\mathcal{S}$ dat geparametriseerd wordt door $\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (1 - x)\mathbf{k}$, $0 \leq x, y \leq 1$ noemen we $\mathcal{S}_1$. De rand van $\mathcal{S}_1$ noemen we $\mathcal{L}$. Gegeven is verder het vectorveld

$$\mathbf{H}(x, y, z) = x(x + z)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + zy\mathbf{k}$$

(a) Bereken rechtstreeks de flux van $\mathbf{H}$ door $\mathcal{S}_1$. (10 pt)

(b) Bereken de flux van $\mathbf{H}$ door $\mathcal{S}_1$, door gebruik te maken van de divergentiestelling. (15 pt)

(c) Bereken rechtstreeks

$$I = \int_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

(10 pt)

(d) Bereken I door gebruik te maken van de stelling van Stokes. (10 pt)