Tentamen differentiaalvergelijkingen 27 juni 2011

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, het nummer van je collegekaart en bij voorkeur ook de naam van je werkcollegeleider (Sebastiaan Janssens, Wilfred de Graaf of Thomas Wasserman).
- Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel in het vervolg gebruiken.
- De 3 opgaven tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

1. We bestuderen de lineaire 2de orde differentiaaloperator L met constante coëfficiënten 1, -1 en 0, dat wil zeggen $Ly = y'' - y'$ en zoeken een oplossing van het door

$$(Ly)(x) \;=\; f(x) \;, \quad y(0) \;=\; y(1) \;=\; 0 \tag{1}$$

gedefinieerde randwaardeprobleem.

(*i*) Los $Lu = 0$ onder de randvoorwaarden $u(0) = 0$ en $u(1) = 1$ op.

(*ii*) Los $Lv = 0$ onder de randvoorwaarden $v(0) = 1$ en $v(1) = 0$ op.

(*iii*) Construeer met behulp van de in (*i*) en (*ii*) gevonden oplossingen u en v een functie van Green voor het randwaardeprobleem (1) en bereken voor $f(x) = \mathrm{e}^x$ de zo verkregen oplossing van (1).

(z.o.z.)

2. Beschouw de lineaire 2de orde differentiaalvergelijking

$$(1 + x^2)y'' \; + \; 2xy' \; - \; 2y \;\; = \;\; 0 \tag{2}$$

met variabele coëfficiënten.

(i) Schrijf $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en geef een recurrente betrekking voor de coëfficiënten a_n.

(ii) Bereken (eerst!) de oplossing $y(x)$ met beginwaarden $y(0) = 0$ en $y'(0) = 1$. Geef een expliciete uitdrukking voor de coëfficienten van de machtreeks en controleer dat de zo gevonden functie inderdaad een oplossing van (2) is.

(iii) Bereken de machtreeks voor de oplossing $y(x)$ met beginwaarden $y(0) = 1$ en $y'(0) = 0$. Geef een expliciete uitdrukking voor de coëfficienten (los de recurrente betrekking op). *Opmerking:* dit is de reeks voor $1 + x(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x)$.

(iv) Geef de oplossing met beginwaarden $y(0) = 1 = y'(0)$.

3. Beschouw op $\mathbb{R}^2$ het door $H(y) = \frac{1}{2}y_1^2 y_2 + \frac{1}{6}y_2^3 - 2y_2$ gegeven niet-lineaire Hamilton-stelsel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y \;\; = \;\; \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial y_2} \\ -\dfrac{\partial H}{\partial y_1} \end{pmatrix} \; . \tag{3}$$

(i) Geef de evenwichtspunten en bepaal hun stabiliteit.

(ii) Schets het faseplaatje.