

Hertentamen differentiaalvergelijkingen 20 augustus 2012

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam en je studentnummer.
- Laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel uiteraard wel gebruiken.
- De 4 opgaven tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

1. Los het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} \dot{y} = \exp(t + y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

op. *Hint:* let op het domein.

2. Bepaal alle oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} y .$$

3. We beschouwen op \mathbb{R}^2 het niet-lineaire systeem

$$\begin{aligned}\dot{q} &= 2pq \\ \dot{p} &= q^2 - p^2 - 1\end{aligned}\tag{1}$$

van differentiaalvergelijkingen.

- (i) Ga na dat (1) een Hamiltoniaans systeem is. Geef alle mogelijke Hamiltonfuncties.
- (ii) Bepaal de evenwichtspunten en hun stabiliteit.
- (iii) Schets het faseplaatje. Bereken hiervoor waar hulpzaam ook eigenvectoren van de in (ii) gevonden linearisaties.

4. Beschouw de lineaire 2de orde differentiaalvergelijking

$$\ddot{y} + t^3\dot{y} + 3t^2y = 0\tag{2}$$

met variabele coëfficiënten.

- (i) Schrijf $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ voor een oplossing van (2) en geef een recurrente betrekking voor de coëfficiënten a_n .
- (ii) Bereken de machtreeks voor de oplossing $y^1(t)$ met beginwaarden $y^1(0) = 1$ en $\dot{y}^1(0) = 0$. Geef een expliciete uitdrukking voor de coëfficiënten (los de recurrente betrekking op).
- (iii) Geef de oplossing $y^2(t)$ met beginwaarden $y^2(0) = 0$ en $\dot{y}^2(0) = 1$.
- (iv) Bereken voor de oplossing $y^3(t)$ met beginwaarden $y^3(0) = 3$ en $\dot{y}^3(0) = 5$ de splitsing in even en oneven gedeelte.