Deeltentamen differentiaalvergelijkingen 18 april 2011

- Zet op elk vel dat je inlevert je naam, het nummer van je collegekaart en bij voorkeur ook de naam van je werkcollegeleider (Sebastiaan Janssens, Wilfred de Graaf of Jori Matthijssen).
- Laat bij elke opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt.
- Ook als je (een onderdeel van) een opgave niet kunt maken mag je dat onderdeel/die opgave uiteraard wel gebruiken.
- Alle 9 opgaven tellen even zwaar.
- *SUCCES!*

Een (systeem van) autonome differentiaalvergelijking(en) $\dot{y} = f(y)$ is van gradiënt-type als er $V : \mathbb{R}^n \supset\!\longrightarrow \mathbb{R}$ bestaat met $f = \mathrm{grad}V$. Wij veronderstellen in het vervolg $V \in C^2$.

1. Los voor $V(y) = y^3 - 3y + 9$ de gradiënt-vergelijking $\dot{y} = V'(y)$ op. Wat zijn de dynamische verschillen tussen de twee oplossingen met beginwaarden in minimum en maximum ? *Hint:* maak een plaatje.

2. Laat zien dat elke scalaire autonome differentiaalvergelijking met $f \in C^1$ van gradiënt-type is. Laat tevens zien dat de matrix van een lineaire gradiënt-vergelijking symmetrisch is.

3. Bereken de tijdsafgeleide van $V(y(t))$, waar $y(t)$ een oplossing van $\dot{y} = \mathrm{grad}V$ is. Toon hiermee aan dat een differentiaalvergelijking van gradiënt-type nooit een periodieke baan kan hebben. *Herinnering:* een periodieke baan heeft een minimale periode $\tau > 0$ met $y(t + \tau) = y(t)$ voor alle $t \in \mathbb{R}$.

4. Bepaal een fundamentele matrix voor de door $V(y) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 2y_1y_2 - 2y_2y_3 - 2y_1y_3$ gegeven gradiënt-vergelijking $\dot{y} = \mathrm{grad}V$.

Beschouw de algemene lineaire gradiënt-vergelijking in het vlak, gegeven door $V(y) = \frac{a}{2}y_1^2 + \frac{b}{2}y_2^2 + cy_1y_2$. Noem de zo aan de rechter kant verkregen matrix A.

5. Geef spoor, determinant, eigenwaarden en de discriminant Δ van de eigenwaardevergelijking voor A in termen van de parameters a, b en c.

6. Voer de nieuwe parameters $s = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$, $u = \frac{a-b}{\sqrt{2}}$ en $v = \sqrt{2}c$ in en schets in de (s, u, v)–ruimte het oppervlak $\det A = 0$.

7. Geef voor de parameterwaarden $(s, u, v) = (3, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0), (-1, 1, 0)$ en $(-3, 1, 0)$ elk een faseplaatje. Dit levert samen met opgave 6 een bifurcatie-diagram op. Hoe veranderen de faseplaatjes langs de s–as (dus voor $u = v = 0$) ?

Beschouw op $\mathbb{R}^2$ de door $V(y) = \frac{1}{2}y_1^2y_2 + \frac{1}{6}y_2^3 - 2y_2$ gegeven niet-lineaire gradiënt-vergelijking.

8. Geef de evenwichtspunten en bepaal hun stabiliteit.

9. Schets het faseplaatje.