Docent: Yuri A. Kuznetsov

Uitwerking Tentamen Analyse B, 28 juni 2012

Opgave 1 [15pt] Bereken

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sin(\pi x)}}.$$

Hint: $a^b = e^{b\log a}$.

Zij $I =]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$. Voor alle $x \in I \setminus \{1\}$ geldt dat

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sin(\pi x)}} = e^{\log\left(\frac{1}{x}\right)\,\frac{1}{\sin(\pi x)}} = e^{-\frac{\log x}{\sin(\pi x)}}.$$

Definieer

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad f(x) = -\log x, \quad g(x) = \sin(\pi x).$$

De functies f en g zijn continu differentieerbaar op I met de afgeleiden

$$f'(x) = -\frac{1}{x} \quad \text{en} \quad g'(x) = \pi\cos(\pi x).$$

Verder hebben we $f(1) = -\log(1) = 0$ en $g(1) = \sin(\pi) = 0$, terwijl $g'(x) < 0$ voor alle $x \in I$. De regel van de l'Hôpital is dus toepasbaar en geeft

$$\lim_{x\to 1}\varphi(x) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{-1}{-\pi} = \frac{1}{\pi}.$$

De exponentiële functie is continu, dus

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sin(\pi x)}} = \lim_{x\to 1} e^{\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)} = e^{\frac{1}{\pi}}.$$

Opgave 2 [15pt] Bewijs dat $|\arctan x - \arctan y| \le |x-y|$ voor alle $x, y \in \mathbb{R}$.

De functie $f(u) = \arctan u$ is continu differentieerbaar op $\mathbb{R}$ met

$$f'(u) = \frac{1}{1+u^2}.$$

Merk op dat $f'(u) \le 1$ voor alle $u \in \mathbb{R}$.

Als $x = y \in \mathbb{R}$ dan $|f(x) - f(y)| = 0 = |x-y|$.

Zij $x, y \in \mathbb{R}$ twee verschillende reële getallen. Als $x > y$, dan bestaat er wegens de middelwaardestelling een $u \in]y, x[$ zo dat

$$f(x) - f(y) = f'(u)(x-y).$$

Hieruit volgt dat

$$|f(x) - f(y)| = |f'(u)(x-y)| = |f'(u)|\;|x-y| \le |x-y|$$

ofwel $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$.

Als $x < y$ dan bestaat er wegens dezelfde stelling een $u \in]x, y[$ met

$$f(y) - f(x) = f'(u)(y - x),$$

waaruit steeds blijkt dat $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$.

Opgave 3 [30pt] Zij $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Beschouw de functie $f : D \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x, y) = 2 \sin x + 2 \sin y + \sin(x + y).$$

(a) [5pt] Geef een bovengrens en een ondergrens van f op D.

Voor iedere $\xi \in \mathbb{R}$ geldt $|\sin \xi| \leq 1$. Met de driehoeksongelijkheid hebben we

$$|f(x, y)| = |2 \sin x + 2 \sin y + \sin(x + y)| \leq 2|\sin x| + 2|\sin y| + |\sin(x + y)| \leq 2 + 2 + 1 = 5$$

ofwel

$$-5 \leq f(x, y) \leq 5$$

voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ en dus voor alle $(x, y) \in D$. Dus is $M = 5$ een bovengrens en is $m = -5$ een ondergrens van f.

Wegens $\sin \xi \geq 0$ voor $\xi \in [0, \pi]$, zien we dat $f(x, y) \geq 0$ voor alle $(x, y) \in D$. Uit $f(0, 0) = 0$ volgt dan dat

$$\min_D f = 0.$$

(b) [10pt] Laat zien dat er één stationair punt (x_0, y_0) van f in D is met

$$\cos x_0 = \cos y_0 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

De functie f is differenteerbaar op $\mathbb{R}^2$ met de partiële afgeleiden

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \cos x + \cos(x + y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \cos y + \cos(x + y).$$

De stationaire punten van f zijn oplossingen van het stelsel

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad \text{ofwel} \quad \begin{cases} 2 \cos x + \cos(x + y) = 0, \\ 2 \cos y + \cos(x + y) = 0. \end{cases}$$

Zij $(x_0, y_0) \in D$ een oplossing van het stelsel. Dan moet $\cos x_0 = \cos y_0$ gelden. Omdat cos een strikt monotoon dalende functie op $[0, \frac{\pi}{2}]$ is, concluderen we dat $x_0 = y_0$. Dit impliceert dat x_0 voldoet aan de vergelijking

$$2 \cos x_0 + \cos(2x_0) = 0 \quad \text{ofwel} \quad 2 \cos x_0 + 2 \cos^2 x_0 - 1 = 0.$$

Definieer $t = \cos x_0$. Dan krijgen we de kwadratische vergelijking

$$t^2 + t - \frac{1}{2} = 0,$$

die twee oplossingen heeft, nl.

$$t_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \quad \text{en} \quad t_2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2},$$

waarvan t_2 onacceptabel is wegens $|t_2| > 1$. Voor t_1 is het evident dat $0 < t_1 < 1$. Dus is er één $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ zo dat

$$\cos x_0 = \cos y_0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

(c) [15pt] Bepaal de minimale en maximale waarden van f op D.

De functie $f : D \to \mathbb{R}$ is continu en de verzameling $D \subset \mathbb{R}^2$ is begrensd en gesloten. Dus neemt f zijn minimale en maximale waarden aan in D: Er zijn punten $(p,q) \in D$ en $(P,Q) \in D$ zo dat

$$f(p,q) \le f(x,y) \le f(P,Q) \quad \text{voor alle} \quad (x,y) \in D.$$

We hebben al gezien dat $f(0,0)$ een minimale waarde is van f in D.

De maximale waarde kan genomen worden óf in een inwendig punt $(\xi,\eta) \in \operatorname{inw}(D)$ óf in een punt (ξ,η) op de rand ∂D van D. Als $(\xi,\eta) \in \operatorname{inw}(D)$ dan moet dit punt een stationair punt zijn. Maar f heeft slechts één stationair punt in $\operatorname{inw}(D)$, nl. (x_0,y_0) met $y_0 = x_0$. De waarde van de functie in dit punt berekenen we as volgt:

$$f(x_0,x_0) = 4\sin x_0 + \sin(2x_0) = 2\sin x_0(2+\cos x_0) = 2\sqrt{1-\cos^2 x_0}\,(2+\cos x_0).$$

Dit leidt tot

$$f(x_0,x_0) = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}\left(2+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\,(3+\sqrt{3}).$$

Om de maximale waarde van f op ∂D te bepalen, merk eerst op dat $f(x,y)$ symmetrisch is t.a.v. de verwisseling van de argumenten. Het is dus genoeg om de maximale waarden van f op de segmenten $L = \{(x,y) \in D \mid y = 0\}$ en $R = \{(x,y) \in D \mid x = \frac{\pi}{2}\}$ te berekenen.

De beperking van f tot L is de functie $\psi(x) = f(x,0) = 3\sin x$. Deze functie is strikt monotoon stijgend met

$$\max_{[0,\frac{\pi}{2}]} \psi = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \quad \text{en} \quad \min_{[0,\frac{\pi}{2}]} \psi = 3\sin 0 = 0.$$

De beperking van f tot R is gegeven door

$$\varphi(y) = f\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 2\sin y + \cos y + 2.$$

Zijn afgeleide $\varphi'(y) = 2\cos y - \sin y$ is gelijk aan nul in één punt $y_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ met $\tan y_1 = 2$. Dit impliceert dat

$$\cos y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin y_1 = \sqrt{1-\cos^2 y_1} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

De waarden van φ in de randpunten $y = 0$ en $y = \frac{\pi}{2}$ zijn

$$\varphi(0) = 3 \quad \text{en} \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4,$$

terwijl de waarde van φ in het inwendig punt $y_1 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ is

$$\varphi(y_1) = \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + 2 = 2 + \sqrt{5}.$$

Deze waarde is de maximale waarde van f op ∂D, omdat $\varphi(y_1) > 4$.

Nu moeten we de positieve getallen $\alpha = f(x_0, x_0)$ en $\beta = \varphi(y_1) = f(0, y_1)$ met elkaar vergelijken. We hebben

$$(\alpha^2 - 9)^2 = 108 > 80 = (\beta^2 - 9)^2,$$

waaruit blijkt dat $\alpha > \beta$. De maximale waarde van f is dus genomen in het punt (x_0, x_0), d.w.z.

$$\max_D f = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}\,(3+\sqrt{3})}.$$

Opgave 4 [15pt] Zij $a < b$ en laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een continue functie zijn. Neem drie willekeurige punten $x_k \in [a, b], k = 1, 2, 3$. Laat zien dat er een punt $\xi \in [a, b]$ bestaat zo dat

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)}{3}\ .$$

Hint: Definieer een functie $g : K \to \mathbb{R}$ waarin $K = [a, b] \times [a, b] \times [a, b]$ door de formule

$$g(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)}{3}$$

en bewijs dat $g(K) = [c, d]$ waarin $c = \min\limits_{[a,b]} f$ en $d = \max\limits_{[a,b]} f$.

De functie f is een continue functie op een begrensd en gesloten interval. Definieer

$$c = \min_{[a,b]} f, \quad d = \max_{[a,b]} f.$$

Dan bestaan $\xi, \eta \in [a, b]$ zo dat $c = f(\xi)$ en $d = f(\eta)$. Bovendien geldt dat $f([a, b]) = [c, d]$.

Voor iedere $(x_1, x_2, x_3) \in K$ geldt

$$\frac{1}{3}\left(\min_{[a,b]} f + \min_{[a,b]} f + \min_{[a,b]} f\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)}{3} \leq \frac{1}{3}\left(\max_{[a,b]} f + \max_{[a,b]} f + \max_{[a,b]} f\right)$$

ofwel

$$c = \min_{[a,b]} f \leq g(x_1, x_2, x_3) \leq \max_{[a,b]} f = d.$$

Dit betekent dat $g(K) \subset [c, d]$. Verder geldt $g(\xi, \xi, \xi) = c$ en $g(\eta, \eta, \eta) = d$.

Zij $\gamma(t) = (1 - t)\xi + t\eta,\ t \in [0, 1]$. Dan

$$(\gamma(t), \gamma(t), \gamma(t)) \in K \quad \text{voor alle} \quad t \in [0, 1]$$

en

$$(\gamma(0), \gamma(0), \gamma(0)) = (\xi, \xi, \xi), \quad (\gamma(1), \gamma(1), \gamma(1)) = (\eta, \eta, \eta).$$

De functie $t \mapsto \varphi(t) = g(\gamma(t), \gamma(t), \gamma(t))$ is continu op $[0, 1]$ en $\varphi(0) = c, \varphi(1) = d$. Met de tussenwaardestelling volgt dat $[c, d] \subset g(K)$.

We hebben dus $g(K) = [c, d] = f([a, b])$. Neem een willekeurig punt $(x_1, x_2, x_3) \in K$. Dan $y = g(x_1, x_2, x_3) \in [c, d]$. Dus is er een punt $\xi \in [a, b]$ waarvoor $f(\xi) = y$ ofwel $f(\xi) = g(x_1, x_2, x_3)$.

Opgave 5 [25pt] Zij $a < b$ en laat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een Riemann-integreerbare functie zijn. We willen in deze opgave bewijzen dat voor iedere $\varepsilon > 0$ er een continue functie $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ bestaat zo dat

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\ dx < \varepsilon. \tag{$*$}$$

(a) [10pt] Neem een $\varepsilon > 0$. Bewijs dat er een stuksgewijs constante (stap) functie $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ bestaat zo dat

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Neem een $\varepsilon > 0$. Omdat $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar is, bestat er een verdeling V van $[a, b]$,

$$V = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\},$$

zo dat

$$\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) < \frac{\varepsilon}{2},$$

waarbij $\overline{S}(f, V)$ en $\underline{S}(f, V)$ boven- en ondersomen van f t.a.v. V zijn, resp. We weten dat voor iedere verdeling

$$\underline{S}(f, V) \le \int_a^b f(x)\, dx \le \overline{S}(f, V).$$

Hieruit volgt dat

$$\int_a^b f(x)\, dx - \underline{S}(f, V) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

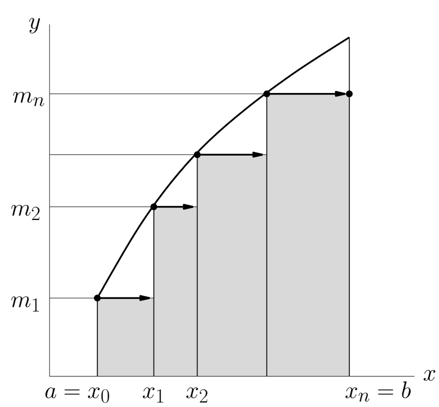
Definieer

$$m_j = \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

en

$$\psi(x) = \begin{cases} m_j & x_{j-1} \le x < x_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \\ m_n & x = x_n. \end{cases}$$

(zie het plaatje).



Dan $f(x) \ge \psi(x)$ voor alle $x \in [a, b]$, de functie $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ is Riemann-integreerbaar en

$$\underline{S}(f, V) = \sum_{j=1}^{n} m_j (x_j - x_{j-1}) = \int_a^b \psi(x)\, dx.$$

Dus

$$\int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx = \int_a^b (f(x) - \psi(x)) dx = \int_a^b f(x)\, dx - \underline{S}(f, V) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

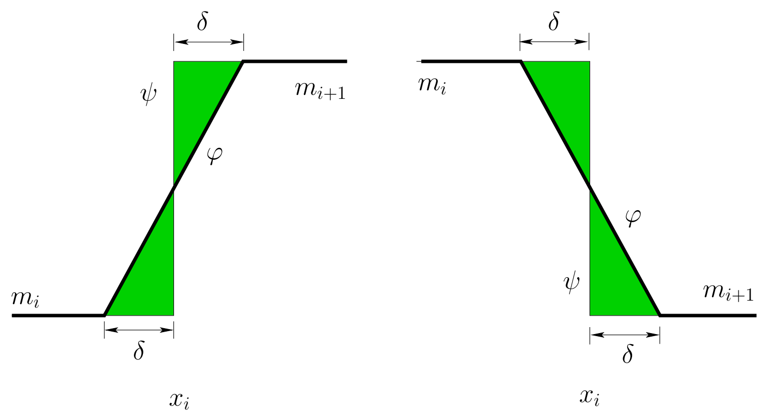
(b) [10pt] Pas de functie ψ aan tot een continue functie $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ zo dat

$$\int_a^b |\psi(x) - \varphi(x)|\ dx \leq \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Zij

$$h = \frac{1}{2} \min_{1 \leq j \leq n} |x_j - x_{j-1}|.$$

Beschouw $x_i, i = 1, 2, \ldots, n-1$ en neem een δ zo dat $0 < \delta < h$. Als $m_i \neq m_{i+1}$ dan passen we de functie ψ rondom x_i als volgt



en noem de nieuwe functie φ. De functie $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ is continu en voldoet aan

$$\int_{x_i-\delta}^{x_i+\delta} |\psi(x) - \varphi(x)|\ dx = |m_{i+1} - m_i|\delta \qquad \text{voor} \ \ i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Dit impliceert dat

$$\int_a^b |\psi(x) - \varphi(x)|\ dx = \sum_{i=1}^{n-1} |m_{i+1} - m_i|\delta = M\delta$$

waarin

$$M = \sum_{i=1}^{n-1} |m_{i+1} - m_i|.$$

Kies nu δ zo dat $0 < \delta < h$ en $M\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Dan geldt

$$\int_a^b |\psi(x) - \varphi(x)|\ dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

(c) [5pt] Bewijs dat voor deze functie φ geldt $(*)$.

We hebben

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq |f(x) - \psi(x)| + |\psi(x) - \varphi(x)| \quad \text{voor alle} \ \ x \in [a,b].$$

De absolute waarde van het verschill van twee Riemann-integreerbare functies is Riemann-integreerbaar. Dus levert de integratie van deze ongelijkheid de beoogte schatting

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx \leq \int_a^b |f(x) - \psi(x)| dx + \int_a^b |\psi(x) - \varphi(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Bonus Opgave [10pt] Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een begrensde en twee keer continu-differentieerbare functie. Bewijs dat er een punt $x_0 \in \mathbb{R}$ is zo dat $f''(x_0) = 0$.

Merk eerst op dat de functies $f''(x)$, $f'(x)$ en $f(x)$ allemaal continu zijn op $\mathbb{R}$ en dus Riemann-integreerbaar op iedere begrensd en gesloten interval. Stel dat $f''(x) \neq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Dan óf $f''(x) > 0$ óf $f''(x) < 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Beschouw eerst het geval $f''(x) > 0$.

Wegens $f''(x) > 0$ is de functie $f'(x)$ strikt momotoon stijgend op $\mathbb{R}$. Er is dus een punt $a \in \mathbb{R}$ zo dat $f'(a) \neq 0$.

De Hoofdstelling van de Integraalrekening impliceert dat

$$f'(t) = f'(a) + \int_a^t f''(\xi)\, d\xi$$

en vervolgens

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt \\ &= f(a) + \int_a^x \left(f'(a) + \int_a^t f''(\xi)\, d\xi \right) dt \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x \left(\int_a^t f''(\xi)\, d\xi \right) dt. \end{aligned}$$

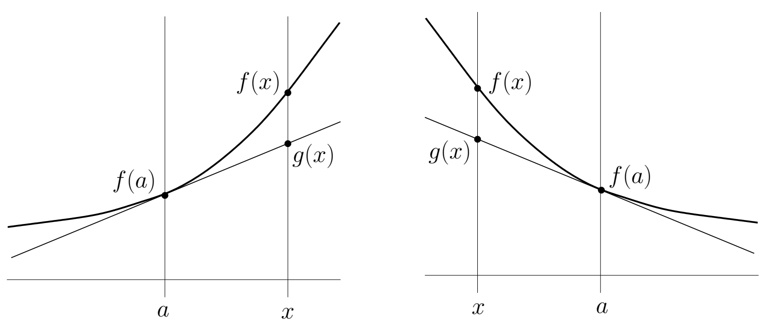
Maar

$$\int_a^x \left(\int_a^t f''(\xi)\, d\xi \right) dt \geq 0 \quad \text{voor alle } \ x \in \mathbb{R}.$$

Dus

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a) \quad \text{voor alle } \ x \in \mathbb{R}.$$

Deze ongelijkheid betekent dat de grafiek van $f(x)$ boven de grafiek van de lineaire functie $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ ligt voor alle $x \neq a$ (en deze lijn raakt in het punt $(a, f(a))$):



Als $f'(a) > 0$ dan is $g(x)$ niet naar boven begrensd as $x \to +\infty$, en dus $f(x)$ ook niet. Als $f'(a) < 0$ dan is $g(x)$ niet naar boven begrensd as $x \to -\infty$, en dus $f(x)$ ook niet. In beide gevallen krijgen we een tegenspraak met de begrensheid van f. Dus kan $f''(x)$ niet strikt positief zijn.

Het geval $f''(x) < 0$ geeft op soortgelijke wijze dat $f''(x)$ niet strikt negatief kan zijn. Er moet dus een punt $x_0 \in \mathbb{R}$ bestaan zo dat $f''(x_0) = 0$.