WAT IS WISKUNDE (Nederlandse versie zie ommezijde)
Monday January 16, 2012, 13.30 – 16.30 uur

- Write the solution to each problem on a separate sheet of paper. On each (separate) sheet you should write your name and student number.
- The grade points are equally distributed among the exercises.
- Do not just state the answers, but prove all your claims. You may use theorems and lemmas from the book, please mention that if you do so. It is not permitted to use computers, calculators, books or (lecture) notes.

1. (**new sheet of paper**) Prove that the function $f : \mathbb{R} - \{5\} \to \mathbb{R} - \{2\}$ defined by $f(x) = \frac{2x}{x-5}$ is bijective. Determine $f^{-1}(x)$ and show that that function is indeed the inverse.

2. (**new sheet of paper**) Calculate the following permutations:

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$.

   (c) Prove that for $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (for $n = 0$ one has the identity permutation)
   $$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}^{n} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}^{6-n}.$$

3. (**new sheet of paper**) (a) Determine the greatest common divisor of 357 and 986.

   (b) Determine $x,\ y \in \mathbb{Z}$ such that gcd(357,986)=$357x + 986y$.

   (c) Prove that there do not exist $x,\ y \in \mathbb{Z}$ such that $3 = 357x + 986y$.

4. (**new sheet of paper**) Let $n \in \mathbb{Z}$ and $f_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ given by $f_n(k) = k + n$.

   (a) Show that $f_n \circ f_m = f_{n+m}$.

   (b) Prove that $(\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}, \circ)$ is a group.

5. (**new sheet of paper**) (a) Prove, by giving an explicit bijection, that $\mathbb{R}$ and $(-1, 1)$ have the same cardinality. Note: If you cannot find this bijection, then prove this in some other way for half of the credit points.

   (b) Prove that $\mathbb{R}$ and $[-1, 1]$ have the same cardinality.

6. (**new sheet of paper**) The least common multiple $\mathrm{lcm}(a, b)$ of natural numbers a and b is the smallest natural number that is divisible by both a and b.

   (a) Determine the $\gcd(165, 315)$ and $\mathrm{lcm}(165, 315)$.

   (b) Show that $165 \cdot 315 = \gcd(165, 315) \cdot \mathrm{lcm}(165, 315)$.

   (c) Prove that $a \cdot b = \gcd(a, b) \cdot \mathrm{lcm}(a, b)$ for any two positive integers a and b. (Possible hint: Use the Fundamental Theorem of Arithmetic and/or the canonical factorization of a and b).

WAT IS WISKUNDE (English version see other side)
Maandag 16 januari 2012, 13.30 – 16.30 uur

- Gebruik voor iedere opgave een apart vel. Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Alle opgaven tellen even zwaar.
- Geef niet alleen antwoorden, maar bewijs al je beweringen. Je mag verwijzen naar lemma's en stellingen uit het boek. Als je dit doet, vermeld dit dan. Het is niet toegestaan computers, rekenmachines, dictaten, boeken of aantekeningen te gebruiken.

1. (**nieuw vel papier**) Bewijs dat de functie $f : \mathbb{R} - \{5\} \to \mathbb{R} - \{2\}$ gedefiniëerd door $f(x) = \frac{2x}{x-5}$ bijectief is. Bepaal $f^{-1}(x)$ en bewijs dat dit inderdaad de inverse is.

2. (**nieuw vel papier**) Bepaal de volgende permutaties:

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$.

   (c) Bewijs voor $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (voor $n = 0$ krijgt men de identiteit) dat

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}^n \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}^{6-n}.$$

3. (**nieuw vel papier**) (a) Bepaal de grootste gemene deler van 357 en 986.

   (b) Bepaal $x,\ y \in \mathbb{Z}$ zodat gcd(357,986)$=357x + 986y$.

   (c) Bewijs dat er geen $x,\ y \in \mathbb{Z}$ bestaan zodat $3 = 357x + 986y$.

4. (**nieuw vel papier**) Laat $n \in \mathbb{Z}$ en $f_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ gegeven worden door $f_n(k) = k + n$.

   (a) Bewijs dat $f_n \circ f_m = f_{n+m}$.

   (b) Bewijs dat $(\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}, \circ)$ een groep is.

5. (**nieuw vel papier**) (a) Bewijs, door een expliciete bijectie te geven, dat $\mathbb{R}$ en $(-1, 1)$ dezelfde cardinaliteit hebben. N.B.: Als je niet zo'n bijectie kunt vinden dan mag je het ook (voor de helft van het aantal punten) op een andere manier aantonen.

   (b) Bewijs dat $\mathbb{R}$ en $[-1, 1]$ dezelfde cardinaliteit hebben.

6. (**nieuw vel papier**) Het kleinste gemene veelvoud (Engels: Least Common Multiple) $\mathrm{lcm}(a, b)$ van twee natuurlijke getallen a en b is het kleinste natuurlijke getal dat deelbaar is door zowel a als b.

   (a) Bepaal $\gcd(165, 315)$ en $\mathrm{lcm}(165, 315)$.

   (b) Toon aan dat $165 \cdot 315 = \gcd(165, 315) \cdot \mathrm{lcm}(165, 315)$.

   (c) Bewijs dat $a \cdot b = \gcd(a, b) \cdot \mathrm{lcm}(a, b)$ voor elk tweetal natuurlijke getallen a en b . (Mogelijke hint: Gebruik de "Fundamental Theorem of Arithmetic" en/of de canonieke factorisatie van a en b).