Uitwerking tentamen WSW 2 januari 2013.

1a

P	Q	R	$\sim P$	$\sim P \vee Q$ (A)	$Q \Rightarrow R$ (B)	$P \Rightarrow R$	$A \wedge B$	$A \wedge B \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
T	T	T	F	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T	T

Omdat voor alle mogelijke waarden van P, Q en R de bewering $((\sim P \vee Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ altijd waar is, is deze bewering een tautologie.

1b We geven een contrapositief bewijs.

Bew. Stel x of y is even.

- Als x is even dan is $x = 2k$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}$ dan is $xy^2 = 2ky^2 = 2(ky^2)$. Omdat $ky^2 \in \mathbb{Z}$ is xy^2 dus even.
- Als y is even dan is $y = 2k$ voor zekere $k \in \mathbb{Z}$ dan is $xy^2 = x(2k)^2 = 2(xk^2)$. Omdat $xk^2 \in \mathbb{Z}$ is dus xy^2 even.

Conclusie: als xy^2 oneven dan zowel x als y is oneven. $\square$

2a $(A-B)\cap(A-C) = A-(B\cup C)$ (a)

<u>Bewijs</u> Stel $x \in (A-B)\cap(A-C)$ dan is $(x\in A$ en $x\notin B)$ en $(x\in A$ en $x\notin C)$, dus $x\in A$ en $x\notin B$ en $x\notin C$, dus $x\in A$ en $x\notin (B\cup C)$ afwel $x\in A-(B\cup C)$

Conclusie: $(A-B)\cap(A-C) \subseteq A-(B\cup C)$. (*)

Stel $x\in A-(B\cup C)$, dan is $x\in A$ en $x\notin B\cup C$ dus $x\in A$ en $x\notin B$ én $x\notin C$ dus $x\in A-B$ én $x\in A-C$ afwel $x\in(A-B)\cap(A-C)$

Conclusie: $A-(B\cup C)\subseteq(A-B)\cap(A-C)$ (**)

Uit (*) en (**) volgt (a) $\square$

2b $A\times(B-C) = (A\times B)-(A\times C)$ (b)

<u>Bewijs</u> Stel $(x,y)\in A\times(B-C)$ dan $x\in A$ én $y\in B-C$ afwel $x\in A$ en $y\in B$ en $y\notin C$ afwel $(x,y)\in A\times B$ en $(x,y)\notin A\times C$ afwel $(x,y)\in A\times B - A\times C$

Conclusie: $A\times(B-C) = (A\times B)-(A\times C)$ $\square$

"afwel" staat voor "$\Longleftrightarrow$".

3 $a_1 = 1$ $a_2 = 4$ $a_3 = 7$ $a_4 = 10$

Vermoeden $a_n = 3n-2$.

<u>Bewijs</u> m.b.v het sterke principe van volledige inductie: $a_1 = 1 = 3\cdot1-2$ $a_2 = 4 = 3.2-2$.

Klopt voor a_1 en a_2.

Stel het is waar voor a_{n-2} en a_{n-1} met $n\geq3$ dan is $a_{n-2} = 3(n-2)-2 = 3n-8$ en $a_{n-1} = 3n-5$

Dan is $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2(3n-5)-(3n-8) = 6n-10-3n+8 = 3n-2$ $\square$

<u>Dus</u> voor elke $n\in\mathbb{N}$ geldt $a_n = 3n-2$

4a) $A_0 = \{(0,0)\}$, A_r is een cirkel met straal $\sqrt{r}$ voor $r > 0$.

Dit is een partitie van $\mathbb{R}^2$: Immers

10 nwering

1) $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ behoort tot een A_r, namelijk $(x,y) \in A_{x^2+y^2}$ (merk op $x^2+y^2 \in [0,\infty)$)

3p

2) Stel $(x,y) \in A_r \cap A_s$ met $r \neq s$ dan is $r = x^2+y^2 = s$ tegenspraak! Dus $A_r \cap A_s = \emptyset$ voor $r \neq s$.

3p

b) R wordt gedefinieerd door:

$(x,y)\ R\ (a,b) \iff x^2+y^2 = a^2+b^2$.

~~(Merk op dat voor deze R bovenstaande $A_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x^2+y^2 = r\}$ vormen de equivalentieklassen.) Stelling 8.4~~

Merk op dat voor deze relatie R de elementen van A_r voor vaste r allemaal aan elkaar gerelateerd zijn. Stelling 8.4 van het boek zegt dan dat R een equivalentie-relatie is omdat de $\{A_r\}$ een partitie van $\mathbb{R}^2$ vormen.

5 $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}} = 1.$

Bewijs Voor alle $\varepsilon > 0$ bestaat er een N, namelijk $N = \left\lceil \sqrt{\frac{4}{\varepsilon}+1} \right\rceil$ zodat als $n > N$

$$\left| \frac{n^2+3}{n^2-1} - 1 \right| = \left| \frac{n^2+3-(n^2-1)}{n^2-1} \right| = \left| \frac{4}{n^2-1} \right| < \left| \frac{4}{N^2-1} \right|$$

$$\leq \frac{4}{\frac{4}{\varepsilon}+1-1} = \varepsilon$$

□

6a. f, g injectief dan $g \circ f$ injectief
~~...~~ <u>Bewijs</u>: Stel $g \circ f(a) = g \circ f(b)$ voor $a, b \in C$ dan is, omdat g is injectief, $f(a) = f(b)$ en omdat f injectief is geldt nu $a = b$. <u>Conclusie</u> $g \circ f$ is injectief. $\square$

6b. $g \circ f$ surjectief dan g surjectief
<u>Bewijs</u>: Omdat $g \circ f$ surjectief is er voor elke $c \in C$ een $a \in A$ zodat $g \circ f(a) = c$, maar dan is er ook een $b \in B$, namelijk $b = f(a)$ zodat $g(b) = g(f(a)) = c$.
<u>Conclusie</u> g is surjectief $\square$.

<u>Normering opg 3</u>

goede formule a_n 2p
bij inductie a_1 en a_2 gecontroleerd 2p
Rest van inductie bewijs i.h.b sterke inductie 6p.

<u>Normering opg 5</u>

limiet juist 2p
Keuze voor N goed 2p
rest van het bewijs 6p.