WAT IS WISKUNDE (Nederlandse versie zie ommezijde)
Monday, March 12, 2012

- This is the full exam for Wat is Wiskunde. You can also do a partial exam *Wat is Wiskunde B*, if you choose to do so, the grades for the partial exam Wat is Wiskunde A and the hand-in exercises also count for the final grade. See another page for this partial exam. **Please, check that you have the appropriate exam!!!**
- Write on each sheet that you hand in your name and student number.
- The grade points are equally distributed among the exercises.
- Do not just state the answers, but prove all your claims. You may use theorems and lemmas from the book, please mention that if you do so. It is not permitted to use computers, calculators, books or (lecture) notes.

GOOD LUCK!

1. Let A, B and C be sets. Prove or disprove the following:
   (a) $A \cup B = A \cap B$ if and only if $A = B$.
   (b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

2. Prove, using the principle of mathematical induction, that for all natural numbers n and for arbitrary real $x \neq -1, 1$
$$x^1 + x^3 + \cdots x^{2n-3} + x^{2n-1} = \frac{x - x^{2n+1}}{1 - x^2}.$$

3. (a) Prove that
$$R = \{((w, x), (y, z)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \max(|w|, |x|) = \max(|y|, |z|)\}$$
   is an equivalence relation on $\mathbb{R}^2$.
   (b) Describe all distinct equivalence classes of R, i.e., give a set of elements in $\mathbb{R}^2$ whose R-equivalence classes are mutually disjoint, such that every element of $\mathbb{R}^2$ is equivalent to an element of that set (and prove your claims).

4. (a) Determine the greatest common divisor of 51 and 288.
   (b) Determine $x,\ y \in \mathbb{Z}$ such that $9 = 51x + 288y$.
   (c) Prove that there do not exist $x,\ y \in \mathbb{Z}$ such that $2 = 51x + 288y$.

5. Let $S = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = 1\}$. Define the following operation on S:
$$(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$
   Prove that the algebraic structure $(S, *)$ is a group. (Hint: $(1, 0)$ is the identity element).

6. Prove that the following two subsets of $\mathbb{R}$ have the same cardinality:
$$A = [0, \infty), \qquad B = \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$$

WAT IS WISKUNDE (English version see other side)
Maandag 12 maart 2012

- Dit is het volledige tentamen Wat Is Wiskunde. Je kunt ook een herkansing van het deeltentamen Wat Is Wiskunde B maken. De cijfers die je gehaald hebt voor de inleveropgaven en het deeltentamen Wat Is Wiskunde A blijven dan meetellen voor je uiteindelijke cijfer. Zie een ander vel voor dit deeltentamen Wat Is Wiskunde B.

  Let op dat je het juiste tentamen maakt!!!

- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert.
- Alle opgaven tellen even zwaar.
- Geef niet alleen antwoorden, maar bewijs al je beweringen. Je mag verwijzen naar lemma's en stellingen uit het boek. Als je dit doet, vermeld dit dan. Het is niet toegestaan computers, rekenmachines, dictaten, boeken of aantekeningen te gebruiken.

SUCCES!

1. A, B en C zijn verzamelingen. Bewijs of weerleg de volgende beweringen:

   (a) $A \cup B = A \cap B$ dan en slechts dan als $A = B$.

   (b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

2. Bewijs met het principe van volledige inductie dat voor elk natuurlijk getal n en voor een willeurig reëel getal $x \neq -1, 1$

$$x^1 + x^3 + \cdots x^{2n-3} + x^{2n-1} = \frac{x - x^{2n+1}}{1 - x^2}.$$

3. (a) Bewijs dat

$$R = \{((w, x), (y, z)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \max(|w|, |x|) = \max(|y|, |z|)\}$$

   een equivalentierelatie is op $\mathbb{R}^2$.

   (b) Beschrijf alle verschillende equivalentieklassen van R, d.w.z. geef een verzameling van elementen van $\mathbb{R}^2$ waarvan de R-equivalentieklassen disjunct zijn, zodat ieder element van $\mathbb{R}^2$ equivalent is met een element uit die verzameling (en bewijs je beweringen).

4. (a) Bepaal de grootste gemene deler van 51 en 288.

   (b) Bepaal $x,\ y \in \mathbb{Z}$ zodat $9 = 51x + 288y$.

   (c) Bewijs dat er geen $x,\ y \in \mathbb{Z}$ bestaan zodat $2 = 51x + 288y$.

5. Laat $S = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = 1\}$. Definiëer de volgende operatie op S:

$$(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

   Bewijs dat de algebraïsche structuur $(S, *)$ een groep is. (Hint: $(1, 0)$ is het identiteitselement).

6. Bewijs dat de volgende twee deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ dezelfde cardinaliteit hebben:

$$A = [0, \infty), \qquad B = \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$$

Partial exam WAT IS WISKUNDE B (Nederlandse versie zie ommezijde)
Monday March 12, 2012

- This is the partial exam for Wat is Wiskunde B, the grades that you scored for the partial exam Wat is Wiskunde A and the hand-in exercises still count for your final grade. You can also do a full exam *Wat is Wiskunde*, if you choose to do so, see another page for this exam. **Please, check that you have the appropriate exam!!!**
- Write on each sheet that you hand in your name and student number.
- The grade points are equally distributed among the exercises.
- Do not just state the answers, but prove all your claims. You may use theorems and lemmas from the book, please mention that if you do so. It is not permitted to use computers, calculators, books or (lecture) notes.

GOOD LUCK!

1. Let $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ be defined by

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{if } x > 0, \\ -2x + 1, & \text{if } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Show that f is one-to-one.

(b) Show that f is onto.

(c) Show that f has an inverse and determine it.

2. (a) Determine the greatest common divisor of 51 and 288.

(b) Determine $x,\ y \in \mathbb{Z}$ such that $9 = 51x + 288y$.

(c) Prove that there do not exist $x,\ y \in \mathbb{Z}$ such that $2 = 51x + 288y$.

3. (a) Let $f : A \to B$ and $g : B \to C$ be two functions. Prove that if both f and g are one-to-one, then $g \circ f$ is also one-to-one.

(b) Is the converse statement also true? I.e., if $g \circ f$ is one-to-one, are both f and g then one-to-one? Prove or disprove this.

4. Let $S = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = 1\}$. Define the following operation on S:

$$(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Prove that the algebraic structure $(S, *)$ is a group. (Hint: $(1, 0)$ is the identity element).

5. Prove that the following two subsets of $\mathbb{R}$ have the same cardinality:

$$A = [0, \infty), \qquad B = \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$$

6. (a) Let $a, b, c \in \mathbb{N}$. Prove that $a + 10b + 100c$ is divisible by 3 if and only if $a + b + c$ is divisible by 3.

(b) Prove that a positive integer k is divisible by 3 if and only if the sum of its digits is divisible by 3.

Deeltentamen WAT IS WISKUNDE B (English version see other side)
Maandag 12 maart 2012

- Dit is het deeltentamen Wat Is Wiskunde B. De cijfers die je gehaald hebt voor de inleveropgaven en het deeltentamen Wat Is Wiskunde A blijven meetellen voor je uiteindelijke cijfer. Je kunt ook een herkansing doen over de gehele stof van Wat Is Wiskunde. Zie een ander vel voor dit volledige tentamen Wat Is Wiskunde.

  Let op dat je het juiste tentamen maakt!!!
- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel dat je inlevert.
- Alle opgaven tellen even zwaar.
- Geef niet alleen antwoorden, maar bewijs al je beweringen. Je mag verwijzen naar lemma's en stellingen uit het boek. Als je dit doet, vermeld dit dan. Het is niet toegestaan computers, rekenmachines, dictaten, boeken of aantekeningen te gebruiken.

SUCCES!

1. Laat $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ gedefiniëerd worden door
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{als } x > 0, \\ -2x + 1, & \text{als } x \leq 0. \end{cases}$$
(a) Bewijs dat f injectief is.
(b) Bewijs dat f surjectief is.
(c) Bewijs dat f een inverse inverse functie heeft en geef deze inverse.

2. (a) Bepaal de grootste gemene deler van 51 en 288.
(b) Bepaal $x,\ y \in \mathbb{Z}$ zodat $9 = 51x + 288y$.
(c) Bewijs dat er geen $x,\ y \in \mathbb{Z}$ bestaan zodat $2 = 51x + 288y$.

3. (a) Laat $f : A \to B$ en $g : B \to C$ functies zijn. Bewijs dat als f en g injectief zijn dat dan $g \circ f$ ook injectief is.
(b) Is de omkering van deze bewering ook waar? D.w.z als $g \circ f$ injectief is, zijn dan f en g beide injectief? Bewijs of weerleg deze bewering.

4. Laat $S = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = 1\}$. Definiëer de volgende operatie op S:
$$(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$
Bewijs dat de algebraïsche structuur $(S, *)$ een groep is. (Hint: $(1, 0)$ is het identiteitselement).

5. Bewijs dat de volgende twee deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ dezelfde cardinaliteit hebben:
$$A = [0, \infty), \qquad B = \mathbb{R} - \mathbb{Q}.$$

6. (a) Gegeven $a, b, c \in \mathbb{N}$. Bewijs dat $a + 10b + 100c$ deelbaar is door 3 dan en slechts dan als $a + b + c$ deelbaar is door 3.
(b) Bewijs dat een positief geheel getal k deelbaar is door 3 dan en slechts dan als de som van zijn cijfers deelbaar is door 3.