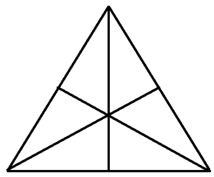
Tentamen groepentheorie 6-1-2017. Je mag resultaten uit het boek en de hoorcolleges vrij gebruiken, zolang je ernaar verwijst en tenzij je gevraagd wordt het opnieuw te bewijzen. Opgaven uit de werkcolleges moet je wel opnieuw te bewijzen. Je mag voorgaande onderdelen van een opgave gebruiken zonder ze bewezen te hebben. Z.O.Z.!

Opgave 1.

(a) **1 punt** Bewijs dat $(123)(45) \in S_6$ een oneven permutatie is en bereken het aantal elementen in zijn conjugatieklasse.

(b) **1 punt** Beschouw $srsr^2 \in D_5$ en bepaal de unieke $0 \leq a < 5$ en $0 \leq b < 2$ waarvoor $srsr^2 = r^a s^b$. Bewijs voor alle $n \geq 3$ dat D_n als normale ondergroep van D_{2n} gerealiseerd kan worden.

(c) **1 punt** Bewijs dat er geen enkelvoudige groep van orde 350 bestaat.



Opgave 2.

(a) **1 punt** Decoreer elk zijvlak van een tetraëder door elk hoekpunt van dat zijvlak te verbinden met het middelpunt van de tegenoverliggende zijde (zie boven). Stel we hebben n kleuren en we verven elk van de zes kleine driehoekjes op elk zijvlak. Bewijs dat—op draaiingen na—precies $\frac{1}{12}(n^{24} + 3n^{12} + 8n^8)$ gedecoreerde tetraëders gemaakt kunnen worden.

(b) **1 punt** Stel G is een groep. Beschouw de afbeelding $\sigma : G \times G \to G$, $\sigma(g,h) = ghg^{-1}$. Bewijs dat dit een groepsactie van groep G op de verzameling $X = G$ is.

(c) **1 punt** Definieer voor elk element g in een groep G de *centralisator* van g als volgt: $C(g) = \{h \in G \mid gh = hg\}$. Bewijs dat $\sum_{\sigma \in S_5} |C(\sigma)| = 7 \cdot 5!$.

Z.O.Z.!

Opgave 3. Zij p een priemgetal en $n > 0$. Beschouw de groep $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$ van $(n \times n)$-matrices A met coefficiënten in $\mathbb{Z}_p$ en $\det(A) \not\equiv 0 \mod p$. Zij $G \leq \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$ de ondergroep van matrices $A = (a_{ij})$ waarvoor $a_{ij} = 0$ voor alle $i > j$.

(a) **1 punt** Zij $H \subset G$ de deelverzameling van matrices $A = (a_{ij})$ waarvoor $a_{ii} = 1$ voor alle i. Laat zien dat $H \lhd G$ en $G/H \cong (\mathbb{Z}_p \setminus \{0\})^n$. Hier is $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\})^n = \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} \times \cdots \times \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ het n-voudig product en $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ wordt beschouwd als groep onder vermenigvuldiging modulo p. *Hint: Voor $A = (a_{ij}) \in G$ geldt dat $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.*

(b) **1 punt** Stel $n = 3$ en $p = 2$. Met welke groep uit de classificatie van groepen van orde 8 is H isomorf? Bewijs je antwoord. *Hint: De quaternionengroep Q heeft precies één element van orde 2.*

(c) **1 punt** Zij p priem en $n > 0$. Bewijs dat G slechts één Sylow p-ondergroep heeft.

Opgave 4. 1 punt Zij G een groep van orde $2p$ met p oneven priem. In deze opgave geef je een ander bewijs voor een stelling uit de colleges: als G niet abels is, dan $G \cong D_{2p}$.

- Stap 1: Laat zien dat een normale ondergroep $H \lhd G$ van orde p bestaat.
- Stap 2: Kies een voortbrenger r van H. Laat zien dat er een element $s \in G \setminus H$ van orde 2 bestaat zodanig dat $G = H \sqcup Hs$.
- Stap 3: vanwege Stap 1 weten we dat $srs^{-1} \in H$; gebruik dit om te laten zien dat $sr = r^{-1}s$. *Hint: Je mag gebruiken dat de enige oplossingen van de vergelijking $x^2 \equiv 1 \mod p$ gegeven worden door $x \equiv \pm 1 \mod p$.*

Woordenboek. Enkelvoudig=simple. Ondergroep=subgroup. Voorbrenger=generator.

Opgave 1. (a) De permutatie $(123)(45) = (13)(12)(45)$ is oneven. De elementen in zijn conjugatieklasse zijn $(abc)(de)$ met a, b, c, d, e onderling verschillend. Er zijn $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3}$ keuzes voor (abc) (delen door factor drie omdat $(abc) = (cab) = (bca)$) en 3 keuzes voor (de). Het antwoord is $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. (b) $sr = r^4 s$ dus $srsr^2 = r^4 s^2 r^2 = r^6 = r$ ($a = 1$, $b = 0$). Teken een een regelmatige $2n$-hoek met daarin een regelmatige n-hoek door iedere keer een hoekpunt over te slaan. Dit laat zien dat $D_n \le D_{2n}$. De index is $\frac{4n}{2n} = 2$, dus D_n is normaal (stelling boek). (c) Stel G is enkelvoudig van orde $350 = 7 \cdot 5^2 \cdot 2$. Dan heeft G een 5-Sylow (Sylow I) en het aantal 5-Sylows is $1, 6, 11, 16, \ldots$ en deelt $7 \cdot 2$ (Sylow III). Dus is er een unieke 5-Sylow en die is normaal (Sylow II); tegenspraak.

Opgave 2. (a) Zij G de groep (draaiings)symmetrieën van de tetraëder en X de collectie van alle $(n^6)^4$ mogelijke decoraties. Dan werkt G op X door de symmetrie toe te passen. Stel r is een draaiing over $\frac{2\pi}{3}$ rond een as door een hoekpunt en het zwaartepunt van het tegenoverliggende zijvlak. Het aantal elementen van X^r is $n^6 \cdot n^2$ (n^2 mogelijkheden voor het zijvlak loodrecht op de draaiingsas—teken een plaatje—en n^6 mogelijkheden voor een ander zijvlak, wat dan de resterende zijvlakken bepaald). Er zijn $4 \cdot 2$ zulke symmetrieën. Zij s de draaiing over π rond een as door de middelpunten van twee tegenoverliggende zijden. Het aantal elementen van X^s is $n^6 \cdot n^6$ (er zijn twee paren van zijvlakken die door s gepermuteerd worden en voor elk paar kunnen we één zijvlak vrij decoreren). Er zijn 3 zulke symmetrieën. Antwoord: $(n^{24} + 4 \cdot 2n^{6+2} + 3n^{6+6})/12$. (b) Axioma's checken. Voor alle $g, l, h \in G$ hebben we $ege^{-1} = ege = g$ en $g(lhl^{-1})g^{-1} = (gl)h(gl)^{-1}$. (c) Beschouw de actie van (b) voor $G = S_5$. Voor alle $\sigma \in G$ hebben we $G^\sigma = C(\sigma)$. De banen zijn gelijk aan conjugatieklassen en het aantal conjugatieklassen van S_5 is gelijk aan het aantal cykelstructuren viz. $5 = 1+1+1+1+1$, $5 = 5$, $5 = 2+1+1+1$, $5 = 4+1$, $5 = 3+1+1$, $5 = 2+2+1$, $5 = 3+2$. De telstelling geeft $\frac{1}{5!}\sum_{\sigma \in S_5} |C(\sigma)| = 7$.

Opgave 3. (a) Definieer $\phi : G \to (\mathbb{Z}_p \backslash \{0\})^n$, $\phi(A) = (a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ voor $A = (a_{ij}) \in G$. Merk op: $a_{ii} \not\equiv 0 \mod p$, voor alle i, want $\det(A) = \prod_i a_{ii} \not\equiv 0 \mod p$. Dit is een groepshomomorfisme omdat de diagonaal van AB gelijk is aan $(a_{11}b_{11}, \ldots, a_{nn}b_{nn})$ voor alle $B = (b_{ij}) \in G$. Deze afbeelding is surjectief omdat voor alle $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}_p \backslash \{0\}$ de diagonaalmatrix $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in G$ hierop afbeeldt (merk op: $a_1 \cdots a_n \not\equiv 0 \mod p$ want anders $a_i \equiv 0 \mod p$ voor een i). De kern van ϕ is precies H dus het resultaat volgt uit de eerste homomorfiestelling. (b) $|H| = p^n = 8$. Beschouw

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dan $\alpha\beta \neq \beta\alpha$ dus $H \cong D_4$ of $H \cong Q$; de enige niet-abelse groepen van orde 8. Maar $\alpha^2 = \beta^2 = e$ en dus $H \cong D_4$ vanwege de hint. (c) Stel N is het aantal elementen a_{ij} in een matrix $A = (a_{ij}) \in G$ met $i < j$ (dus $N = \frac{1}{2}n(n-1)$), dan $|G| = (p-1)^n p^N$. Voorts is $|H|$ gelijk aan p^N en dus is H een p-Sylow, want $\mathrm{ggd}(p, p-1) = 1$. Stel K is ook een p-Sylow, dan $K = gHg^{-1}$ (Sylow II), en dus $K = H$ (H normaal).

Opgave 4. De orde van G is $2p$ en dus is er een p-Sylow $H \le G$ (Sylow I) en het aantal p-Sylows is $1, 1+p, 1+2p, \ldots$ en een deler van 2 (Sylow III). Dus is H de enige p-Sylow en normaal (Sylow II). Stel $H = \langle r \rangle \cong \mathbb{Z}_p$ en stel $s \in G$ is een element van orde 2 (Cauchy). Dan $s \notin H$ ($2 \nmid p$ en Lagrange). Dus $G = H \sqcup Hs$ (Lagrange). We weten ook $srs^{-1} = srs \in H$ (H normaal) en dus $srs = r^n$ voor een $0 \le n \le p-1$. Deze vergelijking n keer met zichzelf vermenigvuldigen geeft $sr^n s = r^{n^2}$ ofwel $r^{n^2} = ssrss = r$. Derhalve $n^2 \equiv 1 \mod p$ en $n = \pm 1$ (hint). $n = -1$ want ander is G abels en dus $sr = r^{-1}s$. We krijgen een isomorfisme $D_{2p} \cong G$.