Tentamen Infinitesimaalrekening A

7 november 2017, beknopte uitwerkingen

Deze uitwerkingen zijn niet de enig mogelijke!

Opgave 1. (a) Als $f(x) = \log(\cos x)$ dan $f'(x) = -\tan x$, $f''(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$, daarom $f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1$ en de tweede-orde Taylorveelterm van $f(x) = \log(\cos x)$ in het steunpunt 0 is $-\frac{1}{2}x^2$. We vinden de benadering $-\frac{1}{8}$ van $f(\frac{1}{2})$.

(b) De fout in de benadering is in absolute waarde $|f'''(s)| \cdot \frac{x^3}{3!}$ waarbij $x = \frac{1}{2}$ en s een onbekend getal tussen 0 en $x = \frac{1}{2}$.

$f'''(x) = \frac{-2\sin x}{\cos^3 x}$. Omdat cos positief en monotoon dalend is op $(0, \frac{\pi}{2})$ en sin positief en monotoon stijgend geldt

dat $|f|$ ook monotoon stijgend is op het interval en dus $|f'''(s) < f'''(\frac{1}{2}) < f'''(\frac{\pi}{6}) = \frac{8}{3\sqrt{3}}$. We finden dat de fout in absolute waarde kleiner is dan $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{18\sqrt{3}}$. Nu is $18\sqrt{3} > 25$ (want $18^2 \cdot 3 = 972 > 625 = 25^2$) dus is de fout in absolute waarde kleiner dan $\frac{1}{25}$.

[De benadering is veel beter, de fout is maar $-0.00558\ldots$]

Opgave 2. We herleiden de vergelijking tot $(1-i)z^2 - 4z + (19 + 9i) = 0$. De abc-formule levert ons $z_{12} = \frac{4\pm\sqrt{-96+40i}}{(2-2i)}$. Stel nu $-96 + 40i = (a + bi)^2$ voor reele a en b dan vinden we $ab = 20$ en $a^2 - b^2 = -96$ en hieruit zie je snel $a = 2$ en $b = 10$ of $a = -2$ en $b = -10$. Invullen levert $z_{12} = \frac{4\pm(2+10i)}{(2-2i)}$ en hieruit met standaardberekening de wortels: $z_1 = -1 + 4i, z_2 = 3 - 2i$.

Opgave 3. Met standaardmethoden vinden we $y = Ae^{-2x}\sin 3x + Be^{-2x}\cos 3x + \sin x + 3\cos x$ waarbij A en B willekeurige reële constanten zijn.

Opgave 4 (a) (7 punten) We stellen eerst $x = u^2$ en daarna $\pi u = v$ en vinden zo $\displaystyle\int_0^1 \sin(\pi\sqrt{x})\,dx = \int_0^1 \sin(\pi u)\,2u\,du = 2\int_0^1 u\sin(\pi u)\,du = 2\int_0^\pi \frac{v}{\pi}\sin(v)\,\frac{1}{\pi}dv = \frac{2}{\pi^2}\int_0^\pi v\sin(v)dv.$

Deze functie primitiveren we door partiële integratie, we vinden $v\cos v + sinv$. Grenzen invullen levert voor de integraal $\frac{2}{\pi^2}$ maal $\pi = \frac{2}{\pi}$.

(b) (8 punten) Ontbinden in factoren levert $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - x^2} = \dfrac{1}{x^2(x-1)}$. Als we deze breuksplitsen werkt het eerste idee $\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x-1}$ niet, wel de methode die je voor kwadratische factoren kan gebruiken $\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{ax+b}{x^2} + \frac{c}{x-1}$. We vinden hieruit $a+c=0, b-a=0, -b=1$ dus $b=-1, a=-1, c=1$ en $\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{ax+b}{x^2} + \frac{1}{x-1}$ $= -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1}$.

Uiteindelijk vinden we als primitieve $F(x) = -\log(x) + \frac{1}{x} + \log(1-x)$. Merk op: omdat $0 < x < 1$ is is $x-1 < 0$ dus daarvan kunnen we de logaritme niet nemen.

Opgave 5. (a) Het handigste doen we deze limiet met Taylorpolynomen $\dfrac{(1-\cos x)\sin x}{x^2\log(1+x)} = \dfrac{(\frac{1}{2}x^2 + O(x^3))(x + O(x^3)}{x^2(x+O(x^2))} \quad (x \to 0) = \dfrac{\frac{1}{2}x^3 + O(x^4)}{x^3 + O(x^4)} = \dfrac{\frac{1}{2} + O(x)}{1 + O(x)} \quad (x \to 0)$ en daarom is de limiet $\frac{1}{2}$.

(b) Er geldt voor alle $x > 0$ dat $x-1 \leq [x] \leq x$ dus $1 - \frac{1}{x} \leq \frac{[x]}{x} \leq 1$. Omdat de linker en rechter schatting limiet 1 hebben, volgt met de knijpstelling $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{[x]}{x} = 1$.

Opgave 6. Als $f(x) = x^x = e^{x\log x}$ dan vinden we met logaritmisch differentieren $f'(x) = x^x(\log x + 1)$ en hieruit $f'(x) > 0$ voor $x > \frac{1}{e}$ dus f is strikt monotoon stijgend op het domein $[\frac{1}{2}, \infty)$. De functie heeft dus een inverse. Het domein van de inverse g is het bereik van f, namelijk $[(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}, \infty) = [\frac{1}{2}\sqrt{2}, \infty)$.

De lineaire benadering van g in het steunpunt 4 is $g(4)+g'(4)(x-4)$. Omdat $f(2) = 4$ geldt $g(4) = 2$. Er geldt met de kettingregel $f(g(x)) = x$ dus $f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$ zodat

$g'(4) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{4\log 2+4}$. De lineaire benadering van g in het steunpunt 4 is dus $2 + \frac{x-4}{4\log 2+4}$.

Opgave 7. De homogene vergelijking $y' - \dfrac{y}{2x} = 0$ heeft als oplossingen (via de standaardmethode) $y = K\sqrt{x}$ waarbij K een constante is.

Om een oplossing van de inhomogene vergelijking te vinden substitueren we $y = K(x)\sqrt{x}$ in de vergelijking en vinden dan na vereenvoudiging $K'(x)\sqrt{x} = x$ dus $K'(x) = \sqrt{x}$ dus $K(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$, en daaruit vinden we de algemene oplossing van de inhomogene vergelijking als $y(x) = \frac{2}{3}x^2 + C\sqrt{x}$ met C een constante.

Door $x = 1$ in te vullen vinden we $1 = y(1) = \frac{2}{3} + C$ dus $C = \frac{1}{3}$.

Bonusopgave. Opgave 8.

Door de limiet $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{2n^2 - k^2}$ te herschrijven als $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{2 - \frac{k^2}{n^2}}$ kunnen we dit zien als een Riemannsom voor de integraal $\int_0^1 \frac{1}{2 - x^2}\, dx$ die met standaard breuksplitsingen kan worden bepaald;

$$\frac{1}{2 - x^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2} - x} + \frac{1}{\sqrt{2} + x}\right).$$

Daarom is $\int \frac{1}{2-x^2}\, dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\log(\sqrt{2} + x) - \log(\sqrt{2} - x))$.

Invullen van grenzen levert een uitkomst die op verschillende manieren kan worden geschreven:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(\log(1 + \sqrt{2}) - \log(1 - \sqrt{2})) = \frac{1}{\sqrt{2}} \log(1 + \sqrt{2}).$$