Hertentamen Wat is Wiskunde (WISB101)
Donderdag 4 januari 2018, 9:00 - 12:00

Docenten: *Barbara van den Berg & Gil Cavalcanti & Karma Dajani & Carel Faber & Harry Smit & Guido Terra-Bleeker*

- GEBRUIK EEN APART VEL VOOR IEDERE OPGAVE. Het tentamen bestaat uit zes opgaven die elk even zwaar meetellen.
- Dit tentamen bevat een NEDERLANDSE en een ENGELSE VERSIE. De Engelse versie staat na de Nederlandse versie.
- Schrijf je naam en studentnummer op elk vel.
- Het gebruik van telefoons, computers, rekenmachines, boeken of aantekeningen is niet toegestaan.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat bij elke (deel)opgave duidelijk zien hoe je aan je antwoorden komt en bewijs al je beweringen.
- Ook als je een onderdeel van een opgave niet kunt bewijzen, mag je dat resultaat in het vervolg wel gebruiken.

Opgave 1 (nieuw vel papier)

(a). (*5 punten*) Laat P, Q en R beweringen zijn. Ga na voor welke waarden van P, Q en R de volgende bewering waar is:

$$((\sim P) \wedge Q) \vee (Q \Rightarrow R).$$

Laat U een universele verzameling zijn met deelverzamelingen $A, B \subseteq U$ en $T(x)$ een open bewering over het domein U. We definiëren de gekwantificeerde beweringen R en S door:

$$\begin{aligned} R: &\quad \Big(\forall x \in A : T(x)\Big) \wedge \Big(\forall x \in B : T(x)\Big) \\ S: &\quad \forall x \in A \cap B : T(x) \end{aligned}$$

(b). (*2 punten*) Bewijs dat $R \Rightarrow S$.

(c). (*3 punten*) Is de omgekeerde implicatie ook waar? Bewijs je antwoord.

Z.O.Z.

Opgave 2 (nieuw vel papier)

(*10 punten*) Een medewerker van een webwinkel wil met kerst postpakketten versturen maar kan alleen beschikken over postzegels van 4 of 5 cent (onbeperkt in aantal). Bewijs met de sterke vorm van inductie dat de medewerker ieder pakketje met verzendkosten vanaf 12 cent kan versturen zonder teveel porto te betalen.

Opgave 3 (nieuw vel papier)

We definiëren de functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $f(x) = x^2 + 2x$.

(a). (*4 punten*) Bewijs met behulp van de definitie van limieten (en zonder rekenregels toe te passen) dat $\lim_{x\to 0} f(x)$ bestaat.

(b). (*2 punten*) Bewijs dat de functie $f(x)$ continu is in het punt $x = 0$.

(c). (*4 punten*) Bewijs met behulp van de definitie van differentieerbaarheid dat f differentieerbaar is in $x = 0$.

Opgave 4 (nieuw vel papier)

(a). (*5 punten*) Laat X en Y twee niet-lege verzamelingen zijn en $f\colon X \to Y$ een functie. We definiëren een relatie R_f op X door xR_fy als $f(x) = f(y)$. Bewijs dat R_f een equivalentierelatie is.

(b). (*5 punten*) Laat $Z = \{0, 1, 2\}$ en laat $\mathcal{P}(Z)$ de machtsverzameling zijn van Z. We definiëren de functie $f\colon \mathcal{P}(Z) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ door

$$f(U) = \sum_{u\in U} u$$

(als $U = \emptyset$ dan stellen we deze som gelijk aan 0). Geef een expliciete beschrijving van de partitie van $\mathcal{P}(Z)$ bepaald door de equivalentierelatie R_f door een opsomming te geven van de elementen in de verschillende equivalentieklassen. Motiveer je antwoord.

Opgave 5 (nieuw vel papier)

Laat A, B en C drie niet-lege verzamelingen zijn en $f\colon A \to B$ en $g\colon B \to C$ twee functies.

(a). (*3 punten*) Neem aan dat $g \circ f\colon A \to C$ injectief is. Bewijs dat f injectief is.

(b). (*3 punten*) Neem aan dat $g \circ f\colon A \to C$ surjectief is. Bewijs dat g surjectief is.

(c). (*2 punten*) Geef een voorbeeld van de volgende situatie: f en g zijn allebei niet bijectief, maar $g \circ f$ is wel bijectief.

(d). (*2 punten*) Neem aan dat $g \circ f$ bijectief is. Bewijs dat dan geldt: f is surjectief dan en slechts dan als g injectief is.

Z.O.Z.

Opgave 6 (nieuw vel papier)

Bewijs of weerleg de volgende uitspraken:

(a). (*3 punten*) Laat X een verzameling zijn, dan geldt voor iedere $n \in \mathbb{Z}$ met $n \geq 2$ dat

$$|\mathbb{Z}_n \times X| = |X|.$$

(b). (*4 punten*) Laat X een aftelbaar oneindige verzameling zijn, dan geldt dat

$$|\mathcal{P}(X \times X)| = |\mathcal{P}(X)|.$$

(c). (*3 punten*) Laat X een verzameling zijn, dan geldt dat er een verzameling Y bestaat zodat $|X| < |Y|$.

EINDE TENTAMEN - ENGELSE VERTALING HIERONDER

Exercise 1 (new sheet of paper)

(a). (*5 points*) Let P, Q and R be statements. Determine for which truth values of P, Q and R the following statement is true:

$$((\sim P) \wedge Q) \vee (Q \Rightarrow R).$$

Let U be a universal set and $A, B \subseteq U$ be subsets of U. Let $T(x)$ be an open sentence over the domain U. We define the quantified statements R and S by

$$\begin{aligned} R: &\quad \big(\forall x \in A : T(x)\big) \wedge \big(\forall x \in B : T(x)\big) \\ S: &\quad \forall x \in A \cap B : T(x) \end{aligned}$$

(b). (*2 points*) Prove that $R \Rightarrow S$.

(c). (*3 points*) Is the converse implication also true? Prove your statement.

Exercise 2 (new sheet of paper)

(*10 points*) An employee of a web shop has to ship online purchases with Christmas but the employee has only 4-cent and 5-cent stamps available (unlimited supply of these stamps). Prove, using the strong principle of mathematical induction, that every amount of postage of 12 cents or more can be formed using just 4 and 5 cent stamps.

P.T.O.

Exercise 3 (new sheet of paper)

Define the function $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ by $f(x) = x^2 + 2x$.

(a). (*4 points*) Prove by using the definition of limits (and without using the fundamental properties of addition/multiplication of limits) that $\lim_{x\to 0} f(x)$ exists.

(b). (*2 points*) Prove that the function $f(x)$ is continuous in $x = 0$.

(c). (*4 points*) Prove by using the definition of the derivative that f is differentiable in $x = 0$.

Exercise 4 (new sheet of paper)

(a). (*5 points*) Let X and Y be nonempty sets and $f\colon X \to Y$ a function. We define the relation R_f on X by xR_fy if $f(x) = f(y)$. Prove that R_f is an equivalence relation.

(b). (*5 points*) Let $Z = \{0, 1, 2\}$ and $\mathcal{P}(Z)$ be the power set of Z. We define a function $f\colon \mathcal{P}(Z) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ by

$$f(U) = \sum_{u \in U} u$$

(if $U = \emptyset$ we set this sum equal to 0). Give an explicit description of the partition of $\mathcal{P}(Z)$ defined by R_f by listing the elements of each equivalence class. Motivate your statement.

Exercise 5 (new sheet of paper)

Let A, B and C be nonempty sets. Let $f\colon A \to B$ and $g\colon B \to C$ be two functions.

(a). (*3 points*) Assume that $g \circ f\colon A \to C$ is injective. Prove that f is injective.

(b). (*3 points*) Assume that $g \circ f\colon A \to C$ is surjective. Prove that g is surjective.

(c). (*2 points*) Give an example of the following situation: f and g are both not bijective, but $g \circ f$ is bijective.

(d). (*2 points*) Assume that $g \circ f$ is bijective. Prove that f is surjective if and only if g is injective.

Exercise 6 (new sheet of paper)

Prove or disprove:

(a). (*3 points*) If X is a set and $n \in \mathbb{Z}$ with $n \geq 2$ then $|\mathbb{Z}_n \times X| = |X|$.

(b). (*4 points*) If X is a countably infinite set, then $|\mathcal{P}(X \times X)| = |\mathcal{P}(X)|$.

(c). (*3 points*) For each set X there exists a set Y such that $|X| < |Y|$.