Hoofdstuk 0: algebraïsche formules

Dit hoofdstuk hoort bij het eerste college infinitesimaalrekening op 3 september 2009. Alle gegevens over de cursus zijn te vinden op

http://www.math.uu.nl/people/hogend/infa.html

0.1. Iedereen die wiskunde op een creatieve manier wil gebruiken, moet vlot met eenvoudige algebraische formules kunnen rekenen, zonder hulp van (grafische) rekenmachines. Ook moet zij of hij kunnen beargumenteren of formules (bijvoorbeeld in een berekening die door iemand anders gemaakt is) correct zijn of niet.
Voorbeeld: "mogen" de volgende formules:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \qquad \frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{c} + \frac{b}{d}$$

Zo ja, waarom? Zo nee, waarom niet?
In dit hoofdstukje geven we een methode om dit soort vragen te beantwoorden. De sommen zullen je misschien helpen om vlotter met de hand met formules te leren rekenen. Deze vaardigheid is erg belangrijk en tijdens de studie zul je hem steeds verder ontwikkelen. Ook in het tijdperk van computers is het belangrijk om met de hand te kunnen rekenen; want in je hoofd krijg je dan een "gevoel" voor formules, en dit is essentieel bij het creatief werken aan problemen.
Studenten komen aan met verschillende voorkennis op dit gebied; als je buurman of buurvrouw veel sneller rekent dan jij, hoef je niet te wanhopen! Je inzicht en vaardigheden zullen snel (en ongemerkt) groeien, vooral door zelf veel te oefenen en actief na te denken over de stof.
Onze behandeling in dit hoofdstuk 0 is tamelijk intuïtief en niet volledig: de theorie komt in andere vakken (op een later moment van de studie) aan de orde. In dit hoofdstuk gaat het vooral om het opfrissen van kennis die je op een of andere manier al hebt gehad. Misschiein komt deze kennis wel in een nieuw licht te staan.
In dit hoofdstuk bedoelen we met letters a, b, c, x, y enz. willekeurige reëele getallen. (Later zal blijken dat de regels ook gelden voor complexe getallen). Reële getallen zijn bijvoorbeeld 0, 1, $\sqrt{2}$, -3, π. "Getal" betekent altijd: reëel getal, tenzij anders aangegeven.
We behandelen eerst de vraag: welke formules "mogen wel", d.w.z. zijn geldig voor alle reëele getallen? Het antwoord is: een formule "mag", d.w.z.

is correct, als je hem op een goede manier kan verantwoorden. Dat betekent, dat die formule afgeleid moet kunnen worden uit bepaalde grondregels die voor alle reële getallen gelden. Die grondregels zelf hoeven dan (tenminste in deze cursus) niet verder verantwoord te worden.
Hier volgen de grondregels die op dit moment het belangrijkste zijn.[1] Voor de duidelijkheid schrijven we vermenigvuldiging met een punt $\cdot$

$a + b = b + a$ (de volgorde waarin je twee getallen optelt maakt niet uit);

$a \cdot b = b \cdot a$ (hetzelfde voor vermenigvuldiging).

Haakjes uitwerken: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.
Nul en één: $a + 0 = 0 + a = a$ en $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
en als $a \neq 0$ en $b \neq 0$ dan $a \cdot b \neq 0$.
Regels voor plus en min:
$a + (-a) = 0$. $-(-a) = a$ $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -a \cdot b$.
We schrijven $a - b$ voor $a + (-b)$.

In deze regels zijn a, b, enz. willekeurige reële getallen. Dus als p, q reële getallen zijn, geldt volgens de eerste regel ook $p + q = q + p$.
Als x, y en z reële getallen zijn, zijn bijvoorbeeld $2x + 3$ en $y - z$ ook reële getallen, en dus geldt ook, volgens de eerste regel,
$(2x + 3) \cdot (y - z) = (y - z) \cdot (2x + 3)$, enz.

We mogen de regels gebruiken zo vaak we willen.
Zo krijgen we bijvoorbeeld:
$a \cdot b \cdot c = b \cdot a \cdot c = b \cdot c \cdot a = c \cdot b \cdot a$ enz. Dus ook de volgorde waarin je drie getallen vermenigvuldigt maakt niet uit.

De regels mogen "door elkaar" gebruikt worden. Zo krijg je bijvoorbeeld $a \cdot (b - c) = a \cdot (b + (-c)) = a \cdot b + a \cdot (-c) = a \cdot b - a \cdot c$. Dit was natuurlijk ook al bekend. Zo'n nieuwe regel die uit de grondregels is afgeleid, kan van nu af aan zelf ook als grondregel worden beschouwd.

We schrijven a^2 voor $a \cdot a$, en $a^3 = a \cdot a \cdot a$, enz.; en $a^1 = a$. Als $a \neq 0$ schrijven we ook $a^0 = 1$. [N.B. Deze formules zijn afspraken die door wiskundigen zijn gemaakt en waaraan iedereen zich houdt.]

[1] We zijn hier niet volledig. Andere grondregels zijn bijvoorbeeld: $(a+b)+c = a+(b+c)$; $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$; $0 \neq 1$; voor elke $a \neq 0$ is er precies één x met $a \cdot x = 1$, enz.

Daarom is $a^2 \cdot a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5 = a^{2+3}$ en $(a^2)^3 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a^6 = a^{2 \cdot 3}$.
Van nu af aan laten we de punt in de vermenigvuldiging meestal weg: ab betekent dus $a \cdot b$.

Allerlei bekende formules kunnen uit deze grondregels worden afgeleid. We laten dit in één geval heel precies zien. Stel, je zou twijfelen aan $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (of deze formule vergeten zijn en alleen de grondregels kennen). Deze formule klopt voor alle reële getallen, omdat hij op de volgende manier kan worden afgeleid:
$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b) = aa + ab + ba + bb = aa + ab + ab + bb = aa + 1 \cdot ab + 1 \cdot ab + bb = a^2 + (1+1)ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
We hebben dan meteen ook
$(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 + 2(-ab) + (-b)(-b) = a^2 - 2ab + b^2$.
N.B. Het is nuttig om in dit voorbeeld heel precies na te gaan hoe elke stap kan worden verantwoord. Dan weet je dat zulke formules in principe zo nauwkeurig **kunnen** worden afgeleid. Het is verder niet de bedoeling in deze cursus, berekeningen iedere keer zo uitgebreid te maken!

Twee voorbeelden: $(x+1)(x-3) = xx + 1x - 3x + (+1)(-3) = x^2 - 2x - 3$. We passen hier de grondregels een paar keer toe, uiteraard zonder alle tussenresultaten op te schrijven.
$(y-1)^2(z+1) = (y^2 - 2y + 1)(z+1) = y^2(z+1) - 2y(z+1) + 1(z+1) = y^2z + y^2 - 2yz - 2y + z + 1$.

Opgaven:

1. Leid uit de grondregels de volgende nieuwe regels af (deze kun je vanaf het moment dat je ze hebt afgeleid, ook als grondregels gebruiken)
   i. $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$.
   ii. $(a-b)(c-d) = ac - bc - ad + bd$.
   iii. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
   iv. $(ab)^2 = a^2 \cdot b^2$ en $(ab)^{74} = a^{74}b^{74}$.
   v. Beredeneer ook waarom voor positieve gehele getallen $n = 2, 3, 4, \ldots$ en $m = 2, 3, 4 \ldots$ geldt $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ en $(a^n)^m = a^{nm}$.

2. Waarom denk je, dat de wiskundigen hebben afgesproken dat $a^1 = a$? En waarom $a^0 = 1$? (bij dit laatste stellen we $a \neq 0$)

3. Laat zien: $(p+q)^2 - (p-q)^2 = 4pq$, en $(s^2 - t^2)^2 + (2st)^2 = (s^2 + t^2)^2$. Gebruik deze formule om vijf verschillende rechthoekige driehoeken te vinden zodat de lengtes van alle drie zijden gehele getallen zijn (denk aan de Stelling van Pythagoras)

4. Werk alle haakjes weg, en schrijf zo eenvoudig mogelijk:

   i. $(2x-4)(x+2)$

   ii. $(p+2q)^3 - (p-2q)^3$

   iii. $3(x+1)(x-2) - (x-1)^2$

   iv. $(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)$ (N.B. dit kan op onhandige en handige manieren)

   v. $(ab)^3 \cdot (a^3b^2)^4$

0.2 Breuken.

Veel mensen in de huidige Nederlandse samenleving weten niet (meer), hoe ze met breuken moeten rekenen. Het is daarom goed voor wiskundestudenten, enkele regels te kennen voor het rekenen met breuken. De volgende regels kun je gemakkelijk onthouden.[2]

Belangrijk! Alle noemers veronderstellen we ongelijk aan nul.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ geldt precies dan wanneer $ad = bc$ en $b \neq 0$ en $d \neq 0$.

$\frac{a}{b} = \frac{af}{bf}$ (Noemer en teller kunnen met een factor ongelijk aan 0 vermenigvuldigd worden; we stellen $b \neq 0,\ f \neq 0$)

Optellen en aftrekken bij gelijke noemer: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$, $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$ $\quad (c \neq 0)$

Vermenigvuldigen en delen: $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$ $\quad \frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{ad}{bc}$. $\quad (b \neq 0,\ c \neq 0)$

Tenslotte $\frac{a}{1} = a$.

Voor $a \neq 0$ schrijven we $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

De wiskundigen hebben afgesproken dat de breuken $\frac{a}{0}$ (voor $a \neq 0$) en ook de breuk $\frac{0}{0}$ niet bestaan als reëel getal (omdat er anders conflicten ontstaan met

[2] In principe kunnen al deze regels worden afgeleid met behulp van de eerdere grondregels en de volgende: grondregel: Voor elk reëel getal $b \neq 0$ en elk reëel getal a is er precies één reëel getal x met $bx = a$; die x schrijven we als $\frac{a}{b}$.

bepaalde grondregels die we voor reële getallen willen laten gelden). Daarom wordt wel gezegd: "delen door 0 mag niet."

Opgaven:

1. Leid uit de regels voor breuken af

   i. $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}$
   ii $\frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{ad-bc}{cd}$
   iii $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$.

2. Bereken, d.w.z. schrijf als zo eenvoudig mogelijke breuk:
   $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$; $\frac{1}{p} - \frac{1}{s}$; $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4}$; $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$

3. Bereken $\frac{p}{q^2} + \frac{2p^3}{q}$ en $q \cdot \frac{p^3}{q^2 r} - r \cdot \frac{p}{qr^3}$.

0.3 Wat "mag wel" en wat "mag niet"?

Regelmatig zullen we met een formule in onze maag zitten met de vraag of deze wel of niet "mag", d.w.z. algemeen geldig is. Een voorbeeld: "mag" $a + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$?
Men kan proberen deze formule uit de grondregels af te leiden; dit zal niet lukken. Dan weet je nog niet of de formule wel of niet klopt: want wat mij niet lukt, zou iemand anders wel kunnen lukken.
Zekerheid dat de formule niet klopt krijg je pas door het vinden van een tegenvoorbeeld (dat meestal makkelijk te vinden is door zomaar wat getallen in te vullen).
Als je in dit geval $a = 1, b = 2, c = 3$ invult, krijg je $a+\frac{b}{c} = 1\frac{2}{3}$ en $\frac{a+b}{c} = 1$. Één tegenvoorbeeld is voldoende om aan te tonen dat de formule niet algemeen geldt. De formule "mag" dus niet.
Er zijn ook gevallen waarin de formule wel klopt, zoals $a = 22, b = 45, c = 1$. Toch is de formule in zijn algemeenheid fout. Zekerheid dat een formule wel klopt, krijg je pas als je hem kan afleiden uit formules waarvan de geldigheid al vaststaat.

Opgaven.
1. Ga van de volgende formules na, of ze wel of niet kloppen (voor alle reële getallen). Geef argumenten voor je mening. Als de formule eventueel niet klopt, probeer dan specifieke getallen te vinden waarvoor hij wel juist is.

i. $(a+b)^3 = a^3 + b^3$.

ii. $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$
(voor $b \neq 0, d \neq 0, b+d \neq 0$).

iii. $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (bc-ad)^2$.

iv. $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$ (voor $b \neq 0, c \neq 0$).

v. $a^3 \cdot a^{-2} = a^1$.

2. Een bijlesleerling gebruikt in zijn uitwerkingen de volgende formules. Hoe leg je de leerling uit waarom de formules niet correct zijn? (je mag niet boos worden en je moet elke formule apart behandelen)

   i. $a^3 + a^{-2} = a^1$

   ii. $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

   iii. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$.

   iv $\sqrt{p+q} = \sqrt{p} + \sqrt{q}$

   v. $\log(a+b) = \log a + \log b$

   vi. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.

   vii. $(a-b)^2 = a^2 + 2ab - b^2$.

3. De bijlesleerling is na je uitleg wanhopig en vraagt: Maar waarom klopt de formule $(2x-4)(x+3) = 2x^2 + 2x - 12$, die je laatst gebruikte, dan wel? Dat is toch niet eerlijk! En hoe weet ik nou wanneer een formule wel of niet klopt? Ik snap er niks meer van!

   Wat antwoord je hierop?

Opmerking. In de een na laatste som, onderdeel iv en v, gebruiken we logaritmes en wortels. Daarvoor kunnen ook rekenregels worden afgeleid uit grondregels. Dit kan ook voor $>$ en $<$, gebroken machten, a^x voor $a > 0$ en x een willekeurig reëel getal, sinus en cosinus, enz.. We behandelen dit onderwerp hier niet expliciet, maar vertrouwen erop dat je intuïtief met de grondregels voor groter, kleiner, logaritmes, machten, enz. vertrouwd bent. In de volgende hoofdstukken komen we af en toe op deze onderwerpen terug. De “moraal” van dit hoofdstukje is, dat je nu een principe kent om (sommige) juiste formules mee af te leiden, en een methode om (sommige) onjuiste formules te herkennen.