

Tentamen Numerieke Wiskunde (WISB251)¹



Maak één opgave per vel en schrijf op ieder vel duidelijk je naam en studentnummer. Laat duidelijk zien hoe je aan de antwoorden komt. Onderstaande formules en stellingen mag je zonder bewijs gebruiken. Succes!

Handige formules en notatie

- Gedeelde differenties ($x_0 < x_1 < \dots < x_n$)

$$f[x_i] = f(x_i), \quad f[x_i, x_j] = \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i}, \quad f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{(x_k - x_i)}.$$

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in [x_0, x_n].$$

- Interpolatie

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i),$$

$$e_n(x) = f(x) - p_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

- Integratie

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{24}(b - a)^3 \quad (\text{midpuntregel}),$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)(f(a) + f(b))/2 - \frac{f''(\xi)}{12}(b - a)^3 \quad (\text{trapeziumregel}).$$

- Middelwaardstelling: Gegeven continue functies f en w waarbij w niet van teken wisselt op het interval $[a, b]$, dan is er een $\xi \in [a, b]$ waarvoor:

$$\int_a^b f(x)w(x) dx = f(\xi) \int_a^b w(x) dx.$$

- Inverse van een 2×2 matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

- Vastepuntstelling: De iteratie

$$x_{k+1} = g(x_k),$$

met $x_0 \in [a, b]$ convergeert naar een vast punt $x_* \in [a, b]$ als $|g'| < 1$ op $[a, b]$. Als bovendien $g'(x_*) = 0$, dan convergeert de iteratie kwadratisch.

- Vastepuntiteratie voor lineaire stelsels: De iteratie

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + M(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_k),$$

convergeert als de spectrale radius van $I - MA$ kleiner dan 1 is, oftewel $\rho(I - MA) < 1$.

- 2 pt. **vraag 1 - niet-lineaire vergelijkingen** We willen een nulpunt vinden van de functie $f(x) = x - \cos x$ in het interval $(0, \pi/2)$ met behulp van Newton's methode:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

- a) Laat zien dat er precies één nulpunt is op het interval $(0, \pi/2)$.

antwoord We zien dat $f(0) < 0$ en $f(\pi/2) > 0$, dus er is minstens één nulpunt. Voor het vaste punt geldt bovendien $x = g(x)$ met $g(x) = \cos x$. We hebben dan $|g'(x)| = |\sin x| < 1$, dus is er volgens de vastepuntstelling precies één vast punt.

- b) Voor welke x_0 convergeert Newton's methode naar het gevraagde nulpunt (geef een interval)?

antwoord Newton's methode is een vastepuntiteratie met $g(x) = x - \frac{x - \cos x}{1 + \sin x}$. De methode convergeert voor x_0 in het interval $\{x \mid |g'(x)| < 1\}$. We hebben $g'(x) = 1 - \frac{(1 + \sin x)^2 - (x - \cos x)(\cos x)}{(1 + \sin x)^2} = \frac{(x - \cos x)(\cos x)}{(1 + \sin x)^2}$. We zoeken nu x zodat $(1 + \sin x)^2 > |x \cos x - \cos^2 x|$. We zien dat dit altijd geldt op het interval $(0, \pi/2)$.

- c) Hoe snel convergeert Newton's methode naar het gevraagde nulpunt wanneer met een x_0 beginnen die in het interval uit b) ligt?

antwoord Hiervoor kijken we naar de afgeleide van f , $f'(x) = 1 + \sin(x)$. Deze is ongelijk nul op het interval $(0, \pi/2)$ dus ook op het vaste punt. We verwachten dan kwadratische convergentie.

- 2 pt. **vraag 2 - numerieke differentiatie** We bekijken de volgende benadering van de tweede afgeleide van een functie op het punt x :

$$f''(x) \approx \frac{2f(x-h) - 3f(x) + f(x+2h)}{3h^2}.$$

- a) Laat zien dat de benaderingsfout van de genoemde benadering is gegeven door $C f'''(\xi) h^q$ met $\xi \in [x-2h, x+h]$ en geef C en q .

antwoord Met behulp van een Taylorentoepassing van $f(x-h)$ en $f(x+2h)$ rond x vinden we $\frac{2f(x-h) - 3f(x) + f(x+2h)}{3h^2} = f''(x) + \frac{h}{18} (8f'''(\xi_1) - 2f'''(\xi_2))$. We kunnen dit met behulp van de tussenwaardestelling vereenvoudigen tot $\frac{f'''(\xi)}{3} h$ met $\xi \in [x-2h, x+h]$.

- b) We gaan nu de afgeleide van $\sin(2x)$ benaderen. Hoe groot moet h zijn zodat de fout gegarandeerd kleiner is dan een gegeven ϵ ?

antwoord Voor de functie $\sin x$ hebben we $|e(h)| \leq \frac{8h}{3}$. Om de fout kleiner dan een gegeven ϵ te krijgen kiezen we dus $h = \frac{3\epsilon}{8}$.

- 3 pt. **vraag 3 - numerieke integratie** We willen een benadering vinden voor integralen van de vorm

$$I = \int_{-t}^t f(x) dx.$$

- a) Laat zien dat we de integraal kunnen benaderen met

$$\tilde{I} = 2tf(0) + \frac{t^3}{3} f''(0)$$

- b) door een Taylorexpanse van f rond $x = 0$ te gebruiken.
 Laat zien dat deze benadering exact is voor polynomen van graad 3 of kleiner.

antwoord Neem $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Invullen en uitwerken van de integraal geeft het gewenste resultaat.

- c) Geef een uitdrukking voor de benaderingsfout indien de vierde afgeleide van f positief is op het interval, ofwel $f^{(4)}(x) > 0$ voor $x \in [-t, t]$.

antwoord Een Taylorexpanse van f geeft $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \frac{x^3}{6}f'''(0) + \frac{x^4}{24}f^{(4)}(\xi)$. Bij integreren van de fout term verdwijnt de x^3 term en krijgen we $I - \tilde{I} = \int_{-t}^t \frac{x^4}{24}f^{(4)}(\xi) dx$. Aangezien $f^{(4)}$ niet van teken wisselt kunnen we dit schrijven als $\int_{-t}^t \frac{x^4}{24}f^{(4)}(\xi) dx = \frac{f^{(4)}(\eta)}{24} \int_{-t}^t x^4 dx = \frac{f^{(4)}(\eta)}{60}t^5$.

- 3 pt. **vraag 4 - differentiaalvergelijking** We willen de differentiaalvergelijkingen oplossen van de vorm

$$y'(t) = y(t) + f(y(t)),$$

met de volgende methode

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t (y_{n+1} + f(y_n)).$$

- a) Laat zien dat dit een eerste orde methode en dus dat de lokale truncatiefout van orde Δt^2 is.

antwoord De oplossing is te schrijven als $y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta t (y(t) + f(y(t))) + \frac{\Delta t^2}{2}y''(\tau)$. Met behulp van een Taylorexpanse schrijven we de methode als $y_{n+1} = y_n + \Delta t (y_n + \Delta t (y_n + f(y_n) + \Delta t^2/2y''(\tau_n)) + f(y_n))$. We zien nu dat $y(t + \Delta t) - y_{n+1} = \mathcal{O}(\Delta t^2)$.

- b) Analyseer de stabiliteit van deze methode en geef een uitdrukking voor het stabiliteitsgebied.

antwoord Pas toe op $f(y) = \lambda y$: $y_{n+1} = y_n + \Delta t y_{n+1} + \Delta t \lambda y_n$, ofwel $(1 - \Delta t)y_{n+1} = (1 + \Delta \lambda)y_n$, dus stabiel als $\frac{|1 + \Delta \lambda|}{|1 - \Delta t|} < 1$.

- c) Geef een bovengrens voor Δt waarvoor de methode nog steeds stabiel is als we deze toepassen op $y'(t) = y(t) + \cos(3y(t))$.

antwoord We hebben in dit geval dat $-2 \leq \lambda \leq 4$. Om de negatieve eigenwaarden in het stabiliteitsgebied te krijgen is de eis $|1 - 2\Delta t| < |1 - \Delta t|$, dus $\Delta t < \frac{1}{2}$.