Tentamen Lineaire Algebra
dinsdag 26 januari 2016, 13.30-16.30 uur

- Het is niet toegestaan telefoons, computers, grafische rekenmachines (wel een gewone), dictaten, boeken of aantekeningen te gebruiken.
- Maak elke opgave op een apart vel. Schrijf op elk vel je naam, studentnummer.
- Alle opgaven, behalve opgave 6, tellen even zwaar, 10 punten per opgave. Er is een bonusopgave (opgave 6, maximaal 5 punten) waarmee je het cijfer van het tentamen op kunt halen. Het cijfer van je tentamen is het behaalde aantal punten gedeeld door 5, met dien verstande dat het tentamencijfer nooit hoger kan zijn dan een 10.
- Geef niet alleen antwoorden, maar bewijs al je beweringen.

SUCCES!

1. (Nieuw vel papier.) Laat
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & -5 & -7 \\ 8 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$
(a) Bepaal een LU-factorisatie van A.
(b) Los op $A\vec{x} = (1, -2, -3)^T$.
(c) Bepaal $\det(A)$.

2. (Nieuw vel papier.) Zij $(\mathbb{R}, \mathbb{R}[x], +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de inproductruimte van polynomen in x met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging. Het inproduct wordt gegeven door ($f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$):
$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$
(a) Bepaal een orthonormale basis van $W = \operatorname{span}\{1, 1+x, x^4\}$.
(b) Bepaal de loodrechte projectie van x^5 op W.

3. (Nieuw vel papier.) (a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van
$$G = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$
(b) Is G diagonaliseerbaar over $\mathbb{R}$? Zo, ja geef een diagonaalgedaante. Zo nee, verklaar waarom niet.
(c) Had je het eerste gedeelte van vraag (b) kunnen beantwoorden zonder opgave (a) uit te voeren? Verklaar je antwoord!

4. (Nieuw vel papier.) Voor $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ definiëren we een afbeelding $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ door

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 5x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3.$$

(a) Bewijs dat dit een inproduct definieert op $\mathbb{R}^3$.
(b) Geef een basis voor

$$(1, 1, -1)^\perp = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (x_1, x_2, x_3), (1, 1, -1) \rangle = 0\}.$$

5. (Nieuw vel papier.) Zij A een reële $n \times n$-matrix, die n verschillende reële eigenwaarden heeft die alle ongelijk aan 0 zijn en laat B een reële inverteerbare $n \times n$-matrix zijn. A en B commuteren, d.w.z. $AB = BA$.
(a) Toon aan dat als $\vec{v}$ een eigenvector is van A bij eigenwaarde λ dat $B\vec{v}$ ook een eigenvector is van A bij diezelfde eigenwaarde λ.
(b) Toon aan dat $\vec{v}$ ook een eigenvector is voor B.
(c) Bewijs dat B ook diagonaliseerbaar is.
(d) Zijn alle eigenwaarden van B ook verschillend? Zo ja, bewijs dit. Als dit niet per se waar is, geef dan een tegenvoorbeeld.

6. (Nieuw vel papier. Bonusopgave) Laat U een unitaire $n \times n$-matrix zijn, d.w.z. $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ voldoet aan $\overline{U}^T U = \mathbb{I}_n$. De streep op de eerste factor staat hier voor complex conjugeren, de T voor transponeren.
(a) Bewijs dat $|\det(U)| = 1$.
(b) Bewijs dat een eigenwaarde λ van U voldoet aan $|\lambda| = 1$.
(c) Bewijs dat $|\mathrm{Tr}(U)| \leq n$.