

UITWERKING TENTAMEN DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN (WISB231)

19 april 2016, 8:30-11:30 uur

Opgave 1 [50pt] Beschouw het volgende stelsel van *stuksgewijs* lineaire differentiaalvergelijkingen in het vlak:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x - 2|x| + y, \\ \dot{y} &= \frac{1}{2}(-9x - |x|) + y. \end{cases} \quad (1)$$

We zullen de stabiliteit van het rustpunt $(x, y) = (0, 0)$ bestuderen. Merk op dat het vectorveld in het rechterlid van (1) *niet* continu differentieerbaar is als $x = 0$.

- (a) [5 pts] Bewijs dat het vectorveld van (1) continu en lokaal Lipschitz-continu is in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, zodat de lokale existentie- en eenduidigheidsstelling geldt voor (1).

Zij $V(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ het vectorveld in het rechterlid van (1), met $P(x, y) = -x - 2|x| + y$ en $Q(x, y) = \frac{1}{2}(-9x + |x|) + y$. De functies $x \mapsto x$, $x \mapsto |x|$ en $y \mapsto y$ zijn continu, lineaire combinaties van continue functies zijn continu, dus zowel $P(x, y)$ als $Q(x, y)$ is continu, en daarmee $V(x, y)$ ook.

We laten nu zien dat V zelfs Lipschitz-continu is, en daarmee ook lokaal Lipschitz-continu. Zij daartoe $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ gegeven. Dan voor de Euclidische norm $\|\cdot\|$ geldt

$$\begin{aligned} \|V(x_1, y_1) - V(x_2, y_2)\| &= \|(P(x_1, y_1) - P(x_2, y_2), Q(x_1, y_1) - Q(x_2, y_2))\| \\ &\leq |P(x_1, y_1) - P(x_2, y_2)| + |Q(x_1, y_1) - Q(x_2, y_2)|. \end{aligned}$$

Merk op dat $|x_1 - x_2| \leq \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|$ en $|y_1 - y_2| \leq \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|$. Nu volgt via de driehoeksongelijkheid (en omgekeerde driehoeksongelijkheid) dat

$$\begin{aligned} |P(x_1, y_1) - P(x_2, y_2)| &= |-x_1 - 2|x_1| + y_1 + x_2 + 2|x_2| - y_2| \\ &= |-(x_1 - x_2) - 2(|x_1| - |x_2|) + (y_1 - y_2)| \\ &\leq |x_1 - x_2| + 2||x_1| - |x_2|| + |y_1 - y_2| \\ &\leq |x_1 - x_2| + 2|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &\leq 4\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|. \end{aligned}$$

Net zo geldt dat

$$\begin{aligned} |Q(x_1, y_1) - Q(x_2, y_2)| &= \left| \frac{1}{2}(-9x_1 + |x_1|) + y_1 - \frac{1}{2}(-9x_2 + |x_2|) - y_2 \right| \\ &= \left| -\frac{9}{2}(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(|x_1| - |x_2|) + (y_1 - y_2) \right| \\ &\leq \frac{9}{2}|x_1 - x_2| + \frac{1}{2}||x_1| - |x_2|| + |y_1 - y_2| \\ &\leq \frac{9}{2}|x_1 - x_2| + \frac{1}{2}|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &\leq 6\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|. \end{aligned}$$

We concluderen hieruit dat $\|V(x_1, y_1) - V(x_2, y_2)\| \leq 10\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|$, oftewel het vectorveld $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is Lipschitz-continu met Lipschitz constante $C = 10$. (Merk op: zeer hoogstwaarschijnlijk is deze constante niet optimaal.)

Alternatief: Eerst kan opgemerkt worden dat V de som is van de lineaire functie

$$(x, y) \mapsto \left(-x + y, -\frac{9}{2}x + y\right)$$

(die duidelijk Lipschitz-continu is) en de functie

$$(x, y) \mapsto \left(-2|x|, \frac{1}{2}|x|\right)$$

(waarvoor de Lipschitz-continuïteit uit die van de functie $x \mapsto |x|$ volgt).

(b) [5 pts] Beschouw de volgende twee lineaire stelsels in het vlak,

$$\begin{cases} \dot{x} &= -3x + y, \\ \dot{y} &= -5x + y, \end{cases} \quad (2)$$

en

$$\begin{cases} \dot{x} &= x + y, \\ \dot{y} &= -4x + y, \end{cases} \quad (3)$$

die overeenkomen met (1) voor $x \geq 0$ en $x \leq 0$, respectievelijk. Beargumenteer dat hieruit volgt dat iedere oplossing van (1) gedefinieerd is voor alle $t \in \mathbb{R}$.

Zij (x_0, y_0) een beginpunt. Als $x_0 \geq 0$ dan zal de oplossing $(x(t), y(t))$ voor (1) overeenkomen met die van (2), zolang $x(t) \geq 0$. Wanneer vervolgens $x(t_1) = 0$ en $\dot{x}(t_1) < 0$ op een zeker tijdstip, zal vervolgens de oplossing overgaan in een van (3) met precies de beginvoorwaarden $(x(t_1), y(t_1))$. Dit herhaalt zich, en net zo wanneer $x_0 \leq 0$. Uit het feit dat existentie van de oplossingen van de lineaire stelsels (2) en (3) gegarandeerd is voor alle $t \in \mathbb{R}$ concluderen we zo hetzelfde voor oplossingen van (1).

(c) [10 pts] Bewijs dat het rustpunt $(x, y) = (0, 0)$ een *stabiel brandpunt* van (2) is, maar dat het een *instabiel brandpunt* van (3) is. Schets de faseplaatjes behorend bij (2) en (3).

Definieer de twee matrices

$$A_2 := \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

zodat de systemen (2) en (3) respectievelijk gegeven worden door

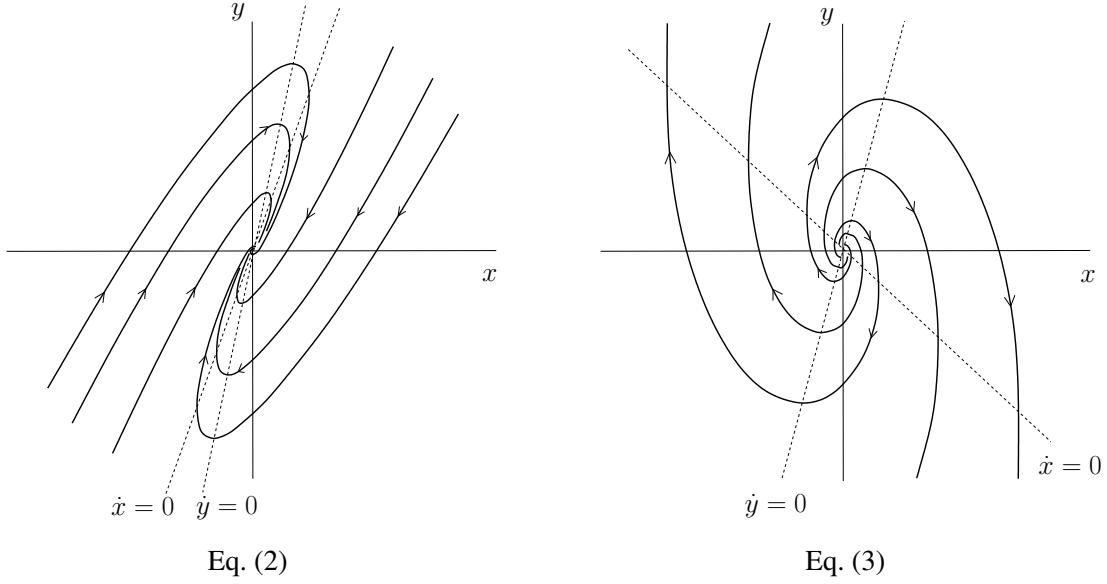
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

De eigenwaarden van A_2 zijn $\lambda_{2\pm} = -1 \pm i$. Aangezien het om twee complexe eigenwaarden gaat met $\text{Re}(\lambda_{2\pm}) = -1 < 0$ concluderen we dat $(0, 0)$ een stabiel brandpunt is van (2). Net zo geldt voor A_3 dat $\lambda_{3\pm} = 1 \pm 2i$. In dit geval hebben we twee complexe eigenwaarden met $\text{Re}(\lambda_{3\pm}) = 1 > 0$ en dus is $(0, 0)$ een instabiel brandpunt van (3). In beide gevallen zal er draaiing rechtsonder plaatsvinden.

(d) [10 pts] Bereken de stromingen $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ voor (2) en $\psi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ voor (3).

Mogelijke eigenvectoren van A_2 zijn

$$v_{2\pm} = \begin{pmatrix} 2 \mp i \\ 5 \end{pmatrix}$$



Figuur 1: Faseplaatjes van (2) en (3).

behorende bij $\lambda_{2\pm}$ respectievelijk. De matrix A_3 heeft bijvoorbeeld eigenvectoren

$$v_{3\pm} = \begin{pmatrix} \mp i \\ 2 \end{pmatrix}$$

behorende bij $\lambda_{3\pm}$ respectievelijk. Hiermee kunnen we direct de fundamentele matrices opschrijven en daarmee geldt

$$\begin{aligned} \varphi_t = e^{tA_2} &= \Psi_2(t)\Psi_2(0)^{-1} = \begin{pmatrix} (2-i)e^{(-1+i)t} & (2+i)e^{(-1-i)t} \\ 5e^{(-1+i)t} & 5e^{(-1-i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-i & 2+i \\ 5 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} (2-i)e^{(-1+i)t} & (2+i)e^{(-1-i)t} \\ 5e^{(-1+i)t} & 5e^{(-1-i)t} \end{pmatrix} \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5i & 1-2i \\ -5i & 1+2i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t}(\cos(t) - 2\sin(t)) & e^{-t}\sin(t) \\ -5e^{-t}\sin(t) & e^{-t}(\cos(t) + 2\sin(t)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Net zo volgt

$$\begin{aligned} \psi_t = e^{tA_3} &= \Psi_3(t)\Psi_3(0)^{-1} = \begin{pmatrix} -ie^{(1+2i)t} & ie^{(1-2i)t} \\ 2e^{(1+2i)t} & 2e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & i \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -ie^{(1+2i)t} & ie^{(1-2i)t} \\ 2e^{(1+2i)t} & 2e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ -2i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t \cos(2t) & \frac{1}{2}e^t \sin(2t) \\ -2e^t \sin(2t) & e^t \cos(2t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(e) [10 pts] Neem een punt $(0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ met $y_0 > 0$ en vind een minimale $t_0 > 0$ zo dat

$$\varphi_{t_0}(0, y_0) = (0, \eta),$$

met $\eta < 0$. Bereken η als functie van y_0 . Vind daarna een minimale $t_1 > 0$ zo dat

$$\psi_{t_1}(0, \eta) = (0, y_1),$$

met $y_1 > 0$. Geef een expliciete formule voor y_1 als functie van η .

Gegeven y_0 zien we uit (d) dat

$$\varphi_t \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 e^{-t} \sin(t) \\ y_0 e^{-t} (\cos(t) + 2 \sin(t)) \end{pmatrix}.$$

De x -component hiervan moet nul zijn, zodat de minimale t_0 gelijk is aan $t_0 = \pi$. De y -component wordt dan gegeven door $\eta = -e^{-\pi} y_0 < 0$.

Nu geldt net zo dat

$$\psi_t \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \eta e^t \sin(2t) \\ \eta e^t \cos(2t) \end{pmatrix},$$

zodat de minimale t_1 in dit geval gelijk is aan $t_1 = \frac{\pi}{2}$. De y -component wordt dan gegeven door $y_1 = -e^{\frac{\pi}{2}} \eta > 0$.

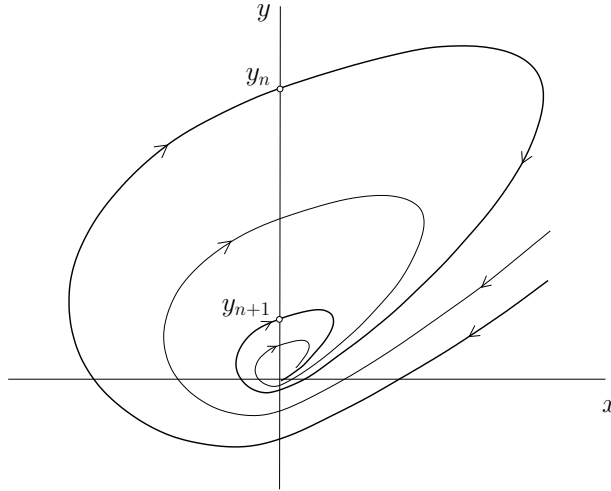
- (f) [5 pts] De samenstelling van de afbeeldingen $y_0 \mapsto \eta$ en $\eta \mapsto y_1$ definieert een afbeelding $y_0 \mapsto y_1 =: f(y_0)$. Laat

$$y_{n+1} = f(y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Bewijs dat $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ voor iedere $y_0 > 0$.

Zij $y_0 > 0$ gegeven. Uit (e) zien we dat $\eta = -e^{-\pi} y_0$ en $y_1 = -e^{\frac{\pi}{2}} \eta$, zodat $y_1 = f(y_0) = e^{-\frac{\pi}{2}} y_0$. Hierdoor is gemakkelijk via inductie te bewijzen dat $y_n = e^{-n \frac{\pi}{2}} y_0$. Hieruit volgt meteen dat $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

- (g) [5 pts] Zij $\xi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de stroming voor (1). Bewijs dat $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t(x, y) = (0, 0)$ voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Schets het faseplaatje behorend bij (1).



Figuur 2: Faseplaatje van (1).

Als $(x, y) = (0, 0)$ is dit duidelijk. Neem daarom een punt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ongelijk aan $(0, 0)$. Zij τ_0 het minimale niet-negatieve getal zodat $\xi_{\tau_0}(x, y) = (0, y_0)$ met een $y_0 > 0$. Definieer

$$\tau_n := \tau_0 + \frac{3\pi}{2} n, \quad n \geq 0.$$

Er geldt $\tau_n \rightarrow \infty$ als $n \rightarrow \infty$. Uit (f) volgt dat $\xi_{\tau_n}(x, y) = (0, y_n)$ met $y_n = e^{-\frac{\pi}{2} n} y_0$. Zij $\rho(t) := \|\xi_t(x, y)\| > 0$ de afstand tussen $\xi_t(x, y)$ en $(0, 0)$. Voor iedere $n \geq 0$, introduceer een functie $\rho_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ op $I = [0, \frac{3}{2}\pi]$ door

$$\rho_n(\tau) := \rho(\tau_n + \tau), \quad \tau \in I,$$

met $\rho_n(0) = y_n$. Uit (e) volgt dat voor $n \geq 0$ geldt

$$\rho_n(\tau) = y_n \varphi(\tau), \quad \tau \in I,$$

waarin de continue functie $\varphi(\tau) := \|\xi_\tau(0, 1)\|$ *onafhankelijk* is van n . Dus

$$\rho_n(\tau) = e^{-\frac{\pi}{2}n} \varphi(\tau), \quad \tau \in I,$$

en $\max_{\tau \in I} [\rho_n(\tau)] \rightarrow 0$. Maar voor iedere $t \geq \tau_0$ geldt

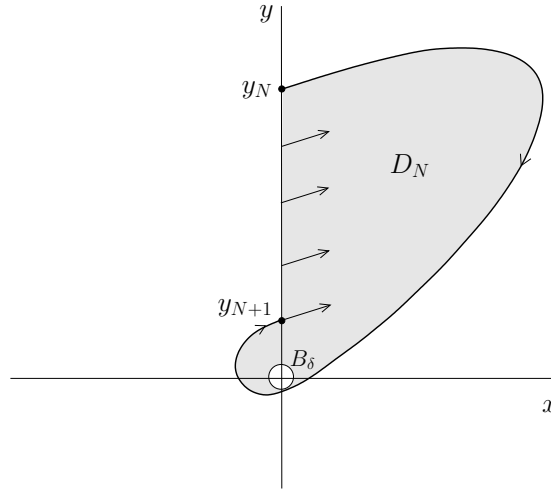
$$\|\xi_t(x, y)\| = \rho_n(\tau)$$

waarin $\tau \in I$ en $n \geq 0$ zo dat $t = \tau_n + \tau$. Omdat $\tau_n \rightarrow \infty$ (en dus noodzakelijk $n \rightarrow \infty$) als $t \rightarrow \infty$, volgt dat $\|\xi_t(x, y)\| \rightarrow 0$ als $t \rightarrow \infty$.

Het faseplaatje voor (1) wordt verkregen uit die van (2) en (3).

(h) [**Bonus 20 pts**] Bewijs dat $(x, y) = (0, 0)$ een asymptotisch stabiel rustpunt is van (1).

Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Neem een punt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ op afstand kleiner dan ε van $(0, 0)$. Beschouw zijn voorwaartse baan, welke achtereenvolgens de positieve helft van de y -as doorsnijdt. Elke twee opeenvolgende doorsnijdingen y_n en y_{n+1} definiëren een gesloten verzameling D_n begrensd door de baan zelf, en het segment van de positieve y -as tussen de doorsnijdingen (zie de onderstaande figuur).



Figuur 3: Illustratie voor asymptotische stabiliteit van $(0, 0)$.

Omdat de banen van (1) elkaar niet snijden, hebben we zo een rij verzamelingen $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die $(0, 0)$ bevatten. Deze verzamelingen voldoen aan $D_{n+1} \subset D_n$ strict, en $\text{dist}(\partial D_n, (0, 0)) \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$ (zie (g)). Dus, voor elke $\varepsilon > 0$ is er een $N > 0$ zodat $D_N \subset B_\varepsilon((0, 0))$. De verzameling D_N is invariant onder de voorwaartse stroming van (1), dat wil zeggen: een baan die begint in D_N kan hem niet verlaten voor $t > 0$. Verder heeft D_N een open bal $B_\delta((0, 0))$ voor een zekere $\delta > 0$ zodat $B_\delta((0, 0)) \subset D_N$. Voor alle beginvoorwaarden in B_δ zitten hun voorwaartse banen in B_ε voor alle $t > 0$, waardoor de oorsprong $(0, 0)$ stabiel en (wegens (g)) asymptotisch stabiel is.

Opgave 2 [20pt] Beschouw de differentiaalvergelijking

$$\ddot{q} + \sin(q) = 0, \tag{4}$$

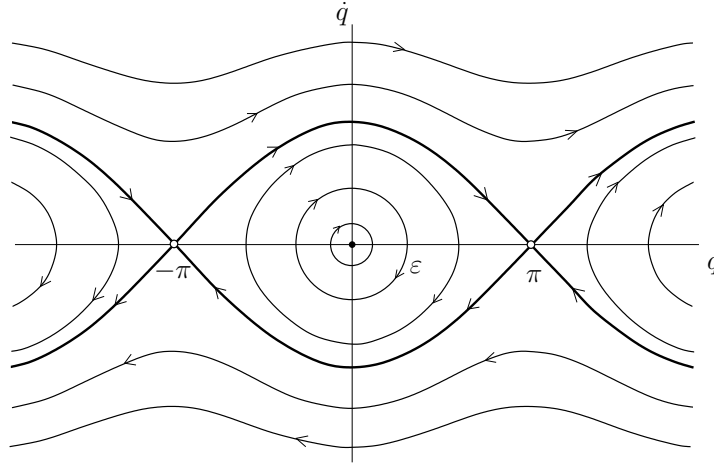
die oscillaties van een ideale slinger beschrijft.

- (a) [5 pts] Schets het faseplaatje van (4) in het (q, \dot{q}) -vlak.

Dit is een Newton mechanisch systeem

$$\begin{cases} \dot{q} = v, \\ \dot{v} = -U'(q), \end{cases}$$

met potentiële energie $U(q) = -\cos(q)$. De methode uit het dictaat geeft het volgende standaard faseplaatje.



Figuur 4: Faseplaatje van (4) in het (q, \dot{q}) -vlak.

- (b) [15 pts] Zij $q(t)$ een periodieke oplossing van (4) met $q(0) = \varepsilon$ waarin $|\varepsilon| \ll 1$ en $\dot{q}(0) = 0$. Het is bekend dat voor *eindige* t en $\varepsilon \rightarrow 0$ deze oplossing kan geschreven worden als

$$q(t) = \varepsilon q_1(t) + \varepsilon^2 q_2(t) + \varepsilon^3 q_3(t) + O(\varepsilon^4).$$

Laat zien dat

$$\ddot{q}_1 + q_1 = 0, \quad \ddot{q}_2 + q_2 = 0, \quad \ddot{q}_3 + q_3 = \frac{1}{6} q_1^3,$$

met $q_1(0) = 1$, $\dot{q}_1(0) = 0$, $q_2(0) = \dot{q}_2(0) = 0$ en $q_3(0) = \dot{q}_3(0) = 0$. Los deze beginwaardeproblemen op en vind expliciete formules voor $q_1(t)$, $q_2(t)$ en $q_3(t)$.

Hint: $\cos^3(t) = \frac{1}{4} \cos(3t) + \frac{3}{4} \cos(t)$.

Beschouw $q_{\text{approx}}(t) := \varepsilon q_1(t) + \varepsilon^2 q_2(t) + \varepsilon^3 q_3(t)$ zodat $q(t) = q_{\text{approx}}(t) + O(\varepsilon^4)$. Nu geldt $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$ en $q^3 = q_{\text{approx}}^3 + O(\varepsilon^4) = \varepsilon^3 q_1^3 + O(\varepsilon^4)$. Hieruit volgt dat $\sin(q) = q - \frac{1}{6}q^3 + O(q^5) = q_{\text{approx}} - \frac{1}{6}\varepsilon^3 q_1^3 + O(\varepsilon^4)$. Merk nu op dat $\ddot{q}(t) = \ddot{q}_{\text{approx}}(t) + O(\varepsilon^4)$ en $\ddot{q}_{\text{approx}}(t) = \varepsilon \ddot{q}_1(t) + \varepsilon^2 \ddot{q}_2(t) + \varepsilon^3 \ddot{q}_3(t)$. Uit de differentiaalvergelijking $\ddot{q} + \sin(q) = 0$ voor $q(t)$ verkrijgen we nu dat

$$\varepsilon \ddot{q}_1 + \varepsilon^2 \ddot{q}_2 + \varepsilon^3 \ddot{q}_3 + q_{\text{approx}} - \frac{1}{6} \varepsilon^3 q_1^3 + O(\varepsilon^4) = 0,$$

of

$$\varepsilon(\ddot{q}_1 + q_1) + \varepsilon^2(\ddot{q}_2 + q_2) + \varepsilon^3 \left(\ddot{q}_3 + q_3 - \frac{1}{6} q_1^3 \right) + O(\varepsilon^4) = 0.$$

Dit per macht van ε interpreterend geeft de beoogde differentiaalvergelijkingen voor q_1 , q_2 en q_3 . Aangezien $\varepsilon = q(0) = q_{\text{approx}}(0) + O(\varepsilon^4) = \varepsilon q_1(0) + \varepsilon^2 q_2(0) + \varepsilon^3 q_3(0) + O(\varepsilon^4)$ zien we dat $q_1(0) = 1$, $q_2(0) = 0$ en $q_3(0) = 0$. Net zo volgt uit $0 = \dot{q}(0) = \dot{q}_{\text{approx}}(0) + O(\varepsilon^4) = \varepsilon \dot{q}_1(0) + \varepsilon^2 \dot{q}_2(0) + \varepsilon^3 \dot{q}_3(0) + O(\varepsilon^4)$ dat $\dot{q}_1(0) = 0$, $\dot{q}_2(0) = 0$ en $\dot{q}_3(0) = 0$.

De differentiaalvergelijkingen voor q_1 en q_2 zijn identiek en hebben als algemene oplossingen functies van de vorm $f(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$ met $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ willekeurige constanten. Aangezien $f(0) = c_1$ en $\dot{f}(t) = -c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t)$ zodat $\dot{f}(0) = c_2$ volgt nu voor q_1 en q_2 dat deze gegeven worden door $q_1(t) = \cos(t)$ (immers hier $c_1 = 1$ en $c_2 = 0$), en $q_2(t) = 0$ (immers hier $c_1 = 0$ en $c_2 = 0$).

We lossen nu het beginwaardeprobleem voor q_3 op. Eerst merken we op dat de algemene oplossing van het homogene probleem

$$\ddot{q}_3 + q_3 = 0$$

wederom gegeven wordt door $f(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$ met $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ willekeurige constanten. Met de hint: $\frac{1}{6} \cos^3(t) = \frac{1}{24}(\cos(3t) + 3 \cos(t))$. Er is dus een “resonantie”: de term $\frac{3}{24} \cos(t)$ heeft dezelfde frequentie $\omega = 1$ als de oplossing van het homogene probleem. We proberen als particuliere oplossing van het inhomogene probleem daarom

$$g(t) = c_3 \cos(3t) + c_4 t \cos(t) + c_5 t \sin(t).$$

Er geldt $\dot{g}(t) = -3c_3 \sin(3t) + c_4 \cos(t) - c_4 t \sin(t) + c_5 \sin(t) + c_5 t \cos(t)$ en $\ddot{g}(t) = -9c_3 \cos(3t) - 2c_4 \sin(t) - c_4 t \cos(t) + 2c_5 \cos(t) - c_5 t \sin(t)$. Hierdoor volgt dat $\ddot{g}(t) + g(t) = -8c_3 \cos(3t) + 2c_4 \sin(t) + 2c_5 \cos(t)$. We zien dat $-8c_3 = \frac{1}{24}$, $c_4 = 0$ en $2c_5 = \frac{3}{24}$. Oftewel, we hebben $c_3 = -\frac{1}{192}$ en $c_5 = \frac{1}{16}$. Een particuliere oplossing wordt dus gegeven door

$$g(t) = -\frac{1}{192} \cos(3t) + \frac{1}{16} t \sin(t).$$

Deze combineren met de algemene oplossing $f(t)$ geeft nu dat

$$q_3(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) - \frac{1}{192} \cos(3t) + \frac{1}{16} t \sin(t).$$

De beginvoorwaarden geven dat $0 = q_3(0) = c_1 - \frac{1}{192}$ oftewel dat $c_1 = \frac{1}{192}$. Verder geldt $\dot{q}_3(t) = -c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) + \frac{3}{192} \sin(3t) + \frac{1}{16} \sin(t) + \frac{1}{16} t \cos(t)$, zodat $0 = \dot{q}_3(0) = c_2$. We concluderen dat de oplossing gegeven wordt door

$$q_3(t) = \alpha(\cos(t) - \cos(3t)) + \beta t \sin(t),$$

waarbij $\alpha = \frac{1}{192}$ en $\beta = \frac{1}{16}$.

Alternatief: Introduceer $x_1(t) = q_3(t)$ en $x_2(t) = \dot{q}_3(t)$. Dan is het beginwaardeprobleem voor q_3 equivalent met

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos^3(t) \end{pmatrix}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0.$$

Zij

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad b(t) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos^3(t) \end{pmatrix}.$$

De stroming voor $\dot{x} = Ax$ is

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

De variatie van constante formule voor $\dot{x} = Ax + b(t)$,

$$x(t) = e^{tA} \left(x(0) + \int_0^t e^{-sA} b(s) ds \right),$$

geeft dan

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} -\cos^3(s) \sin(s) \\ \cos^4(s) \end{pmatrix} ds.$$

Hieruit volgt

$$q_3(t) = x_1(t) = -\frac{1}{6} \cos(t) \int_0^t \cos^3(s) \sin(s) ds + \frac{1}{6} \sin(t) \int_0^t \cos^4(s) ds.$$

Maar

$$\begin{aligned} \int_0^t \cos^3(s) \sin(s) ds &= \frac{1}{4} (1 - \cos^4(t)), \\ \int_0^t \cos^4(s) ds &= \frac{1}{4} \cos(t)^3 \sin(t) + \frac{3}{8} (\cos(t) \sin(t) + t). \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned}
 q_3(t) &= -\frac{1}{24} \cos(t)(1 - \cos^4(t)) + \frac{1}{24} \cos^3(t) \sin^2(t) + \frac{1}{16} \sin(t)(\cos(t) \sin(t) + t) \\
 &= -\frac{1}{24} \cos(t) \sin^2(t)(1 + \cos^2(t)) + \frac{1}{24} \cos^3(t) \sin^2(t) + \frac{1}{16} \sin(t)(\cos(t) \sin(t) + t) \\
 &= \frac{1}{48} \sin(t)(-2 \sin(t) \cos(t) - 2 \cos^3(t) \sin(t) + 2 \cos^3(t) \sin(t) + 3 \sin(t) \cos(t) + 3t) \\
 &= \frac{1}{48} \sin(t)(\cos(t) \sin(t) + 3t) = \frac{1}{48}(\cos(t) - \cos^3(t)) + \frac{1}{16} t \sin(t) \\
 &= \frac{1}{48} \left(\cos(t) - \frac{1}{4} \cos(3t) - \frac{3}{4} \cos(t) \right) + \frac{1}{16} t \sin(t) = \alpha(\cos(t) - \cos(3t)) + \beta t \sin(t),
 \end{aligned}$$

waarbij $\alpha = \frac{1}{192}$ en $\beta = \frac{1}{16}$. Hierbij zijn de hint en de identiteit $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ gebruikt.

(c) [**Bonus 20 pts**] Bewijs dat voor de periode $T(\varepsilon)$ van $q(t)$ geldt dat

$$T(\varepsilon) = 2\pi \left(1 + \frac{1}{16}\varepsilon^2\right) + O(\varepsilon^4) \quad \text{als } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Hint: T is de waarde van $t \approx 2\pi$ waarvoor $q(t)$ een maximum heeft.

Uit (b) zagen we dat

$$q(t) = \varepsilon \cos(t) + \varepsilon^3(\alpha(\cos(t) - \cos(3t)) + \beta t \sin(t)) + O(\varepsilon^4).$$

We zoeken $T(\varepsilon)$, ofwel wanneer $q(t)$ een maximum heeft. Beschouw daartoe zijn afgeleide, te weten

$$\dot{q}(t) = \varepsilon [-\sin(t) + \varepsilon^2((\beta - \alpha) \sin(t) + 3\alpha \sin(3t) + \beta t \cos(t)) + O(\varepsilon^3)].$$

Er moet nu gelden dat $\dot{q}(T) = 0$, ofwel

$$-\sin(T) + \varepsilon^2((\beta - \alpha) \sin(T) + 3\alpha \sin(3T) + \beta T \cos(T)) + O(\varepsilon^3) = 0.$$

We lossen dit op voor kleine ε . Zet daartoe $T = 2\pi + u$. Dan geldt $\sin(u) = \varepsilon^2 [2\pi\beta + O(u)] + O(\varepsilon^3)$. Uit de impliciete functiestelling volgt dat $u = 2\pi\beta\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$, oftewel $T = 2\pi \left(1 + \frac{1}{16}\varepsilon^2\right) + o(\varepsilon^2)$. Opmerkende dat T een even functie is van ε zien we dat $o(\varepsilon^2)$ vervangen mag worden door $O(\varepsilon^4)$, wat het gewenste antwoord geeft.

Opgave 3 [30pt] Beschouw de 4de-orde differentiaalvergelijking voor $y = y(x)$

$$x^4 y'''' + 6x^3 y''' + (2\pi^2 + 7)x^2 y'' + (2\pi^2 + 1)xy' + \pi^4 y = 0, \quad x > 0. \quad (5)$$

(a) [5 pts] Laat zien dat $y(x) = x^r$ voldoet aan (5) dan en slechts dan als

$$f(r) := (r^2 + \pi^2)^2 = 0.$$

Er geldt $y'(x) = rx^{r-1}$, $y''(x) = r(r-1)x^{r-2}$, $y'''(x) = r(r-1)(r-2)x^{r-3}$ en $y''''(x) = r(r-1)(r-2)(r-3)x^{r-4}$. Dit invullen in het linkerlid van (5) geeft dan

$$\begin{aligned}
 &[r(r-1)(r-2)(r-3) + 6r(r-1)(r-2) + (2\pi^2 + 7)r(r-1) + (2\pi^2 + 1)r + \pi^4] x^r \\
 &= [r(r-1)(r-2)(r+3) + r(r(2\pi^2 + 7) - 6) + \pi^4] x^r \\
 &= [r((r-1)(r^2 + r - 6) + r(2\pi^2 + 7) - 6) + \pi^4] x^r \\
 &= [r(r^3 + r^2 - 6r - r^2 - r + 6 + (2\pi^2 + 7)r - 6) + \pi^4] x^r \\
 &= [r^4 + 2\pi^2 r^2 + \pi^4] x^r = f(r)x^r.
 \end{aligned}$$

We zien nu dat het linkerlid gelijk is aan nul dan en slechts dan als $f(r) = 0$.

- (b) [10 pts] Vind *vier* lineair onafhankelijke reële oplossingen van (5).

Uit (a) zien we dat we moeten zoeken naar nulpunten van $f(r)$. Deze zijn $\pm\pi i$, beide met multipliciteit twee. De algemene theorie voor de vergelijking van Euler geeft dan als vier lineair onafhankelijke reële oplossingen $y_1(x) = \cos(\pi \ln x)$, $y_2(x) = (\ln x) \cos(\pi \ln x)$, $y_3(x) = \sin(\pi \ln x)$ en $y_4(x) = (\ln x) \sin(\pi \ln x)$.

- (c) [10 pts] Bewijs dat het homogene randwaardeprobleem op $[1, e]$, dat bestaat uit (5) en $y(1) = y'(1) = y(e) = y'(e) = 0$, geen niet-triviale oplossingen heeft.

De algemene oplossing van (5) wordt, omdat deze vergelijking vierde orde is, gegeven door $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) + c_4 y_4(x)$ met y_i de oplossingen uit (b) en met $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ willekeurige constanten. Merk op dat $y_1(1) = 1$ terwijl $y_2(1) = y_3(1) = y_4(1) = 0$. Er geldt dus $0 = y(1) = c_1$. Verder is $y_2(e) = -1$ terwijl $y_3(e) = y_4(e) = 0$, en dus geldt $0 = y(e) = -c_2$. Er rest dus nog dat $y(x) = c_3 y_3(x) + c_4 y_4(x)$. Merk op dat $y'_3(x) = \frac{\pi}{x} \cos(\pi \ln x)$ waardoor $y'_3(1) = \pi$. Verder volgt $y'_4(x) = \frac{\pi}{x} \cos(\pi \ln x) \ln x + \frac{1}{x} \sin(\pi \ln x)$ zodat $y'_4(1) = 0$ en $y'_4(e) = -\frac{\pi}{e}$. Hierdoor geldt $0 = y'(1) = c_3 \pi$ waardoor ook $c_3 = 0$, en tot slot nog $0 = y'(e) = c_4(-\frac{\pi}{e})$ zodat $c_4 = 0$. We concluderen dat de enige oplossing van het homogene randwaardeprobleem gelijk is aan de nuloplossing, waardoor er geen niet-triviale oplossingen bestaan.

- (d) [5 pts] Hoeveel oplossingen heeft het volgende inhomogene randwaardeprobleem?

$$\begin{cases} x^4 y'''' + 6x^3 y'''' + (2\pi^2 + 7)x^2 y'' + (2\pi^2 + 1)xy' + \pi^4 y = e^{\sin(x^2)}, & x \in [1, e], \\ y(1) = y'(1) = y(e) = y'(e) = 0. \end{cases}$$

Merk op dat $x \mapsto e^{\sin x^2}$ een continue functie $f : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ definieert. We gebruiken het Fredholm Alternatief, wat zegt dat er danwel een eenduidige oplossing van dit inhomogene randwaardeprobleem bestaat, danwel dat het homogene randwaardenprobleem uit (c) een niet-triviale oplossing heeft. In (c) hebben we bewezen dat dit laatste niet het geval is, dus heeft dit inhomogene randwaardeprobleem precies één oplossing.