Hertentamen Speltheorie

10 maart 2015 , 8.30-11.30

Universiteit Utrecht, Mathematisch Instituut

- Zet op elk blad dat je inlevert je naam en studentnummer.
- Als je een onderdeel niet kunt maken, mag je het wel gebruiken in de volgende onderdelen.
- Geef niet alleen antwoorden, maar laat ook zien hoe je er aan komt.

Opgave 1, 25 pt

Beschouw het volgende bi-matrix spel:

$$\begin{pmatrix} (0,-1) & (1,-2) & (4,-2) \\ (1,1) & (0,1) & (2,2) \\ (0,\frac{1}{2}) & (\frac{1}{2},\frac{4}{3}) & (3,2) \end{pmatrix}$$

(a) (10 pt.) Elimineer alle strategieën die strikt gedomineerd zijn, eventueel door gemengde strategieën. Herhaal deze procedure zo vaak mogelijk en geef de bi-matrix van het gereduceerde spel.

(b) (15 pt.) Bepaal alle Nash evenwichten van het oorspronkelijke spel.

Opgave 2, 35 pt. Onderhandelingstheorie volgens Zeuthen

Er wordt door twee spelers onderhandeld over de verdeling van één eenheid van een goed. Net als bij de onderhandelingstheorie van Nash kijken we naar de verdeling van de utilities. Zij $S \subset \mathbb{R}^2$ een *feasible set* van uitkomsten. Een element $s \in S$, met $s = (x, y)$, vertegenwoordigt dus een utility x voor speler 1 en een utility y voor speler 2. Er is een *disagreement* uitkomst $d \in S$, waarbij we voor het gemak aannemen dat $d = (0, 0)$.
Neem aan dat speler 1 een verdeling $s_1 = (x_1, y_1)$ heeft voorgesteld en dat speler 2 het tegenvoorstel $s_2 = (x_2, y_2)$ heeft gedaan. Speler 1 heeft nu drie opties. Hij kan het tegenvoorstel accepteren, waarmee de onderhandeling afgelopen is met als resultaat s_2. Hij kan *insisteren* dat zijn eigen voorstel s_1 aangenomen moet worden. De derde mogelijkheid is dat speler 1 een *concessie* doet. Dat is een tegenvoorstel $s_1' = (x_1', y_1')$ dat gunstiger is voor speler 2 dan voorstel s_1, dus $y_1' > y_1$, maar $y_1' < y_2$.
Als speler 1 heeft geïnsisteerd of een concessie heeft gedaan, heeft speler 2 dezelfde opties als speler 1: accepteren, insisteren, of een concessie aan speler 1

doen. Als de twee spelers na elkaar insisteren, wordt de onderhandeling afgebroken met als resultaat d. De onderhandeling gaan door tot er een overeenkomst is of totdat ze wordt afgebroken.

(a) (5 pt.) Neem aan dat speler 1 alleen de afweging maakt of hij het voorstel s_2 van speler 2 zal accepteren, of dat hij zal insisteren op zijn eigen voorstel s_1. De optie om een concessie te doen laten we op dit moment even buiten beschouwing. Hij moet er rekening mee houden dat als hij insisteert, speler 2 ook zou kunnen insisteren, waarmee de onderhandeling afgebroken zou zijn. Zij p_2 de kans dat speler 2 insisteert op s_2, bij het voorstel s_1 van speler 1. Beredeneer dat speler 1 het voorstel s_2 aanneemt als $p_2 > \frac{x_1 - x_2}{x_1}$.

(b) (5 pt.) Zij p_1 de kans dat speler 1 insisteert op s_1 bij een voorstel s_2 van speler 2. Laat zien dat als speler 2 alleen de keuze wil maken tussen insisteren op s_2 of het accepteren van het voorstel s_1 van speler 1, hij het voorstel zal aannemen als $p_1 > \frac{y_2 - y_1}{y_2}$.

(c) (5 pt.) Zeuthen stelt nu dat de waarde $\frac{x_1 - x_2}{x_1}$ een maat is voor de "volharding (determination)"waarmee speler 1 moet insisteren op zijn voorstel s_1 versus een alternatief s_2. Hoe groter $\frac{x_1 - x_2}{x_1}$, hoe meer speler 1 voor zichzelf kan rechtvaardigen om te insisteren. Geef een verklaring voor deze redenering.

(d) (10 pt.) Zeuthen maakt, op grond van het bovenstaande, de aanname dat de speler met de minste volharding een concessie zal doen. Dat wil zeggen, als $\frac{x_1 - x_2}{x_1} < \frac{y_2 - y_1}{y_2}$ zal speler 1 een concessie doen en als $\frac{x_1 - x_2}{x_1} > \frac{y_2 - y_1}{y_2}$ zal speler 2 een concessie doen. Als de volhardingen gelijk zijn, zal degene die aan de beurt is een concessie doen. We nemen ook aan dat de concessie zodanig is, dat bij de volgende stap de andere speler een concessie zal doen.
Het onderhandelingsverloop is dus dat spelers 1 en 2 afwisselend voorstellen doen, waarbij elk voorstel van een speler een concessie is ten opzichte van het voorstel van z'n tegenstander en zijn eigen vorige voorstel. Zij (x_n, y_n), $n = 1, 2, \ldots$ het voorstel dat in de n-de ronde wordt gedaan. Laat zien dat voor alle $n > 1$ geldt: $x_{n+1} y_{n+1} > x_n y_n$.

(e) (10 pt.) Neem aan dat de de voorstellen uitgedrukt worden in discrete eenheden, bijvoorbeeld euro's. Er komt dan een moment waarop een van beide spelers geen concessie meer kan doen. Laat zien dat de verdeling waarover de spelers het dan eens worden de Nash Bargaining Solution is, waarbij we aannemen dat deze oplossing precies in veelvouden van de discrete eenheid kan worden uitgedrukt.

Gebaseerd op: John C. Harsanyi, Approaches to the Bargaining Problem Before and After the Theory of Games: A Critical Discussion of Zeuthen's, Hicks', and Nash's Theories, Econometrica, Vol. 24, No. 2 (Apr., 1956), pp. 144-157.

Opgave 3, 40 pt.

Zij (N, ν) een *TU* spel. Stel dat er een $i \in N$ bestaat zodat $\nu(S \cup i) - \nu(S) = \nu(\{i\})$, voor alle $S \subset N \backslash \{i\}$. Zo'n speler i wordt een "dummy"speler genoemd.

(a) (10 pt.) Zij $\Phi(N, \nu)$ de Shapley waarde van dit spel. Als $i \in N$ een dummy speler is, bewijs dat $\Phi(N, \nu)_i = \nu(\{i\})$.

Neem $N = \{1, 2, 3\}$ en $\nu(\{1\}) = 2$, $\nu(\{2\}) = 6$, $\nu(\{3\}) = 4$, $\nu(\{1, 2\}) = 8$, $\nu(\{1, 3\}) = 10$, $\nu(\{2, 3\}) = 10$, $\nu(\{1, 2, 3\}) = 16$.

(b) (5 pt.) Bepaal de Shapley waarde van dit spel.

(c) (15 pt.) Bepaal de kern ("core") van dit spel. Geef een twee-dimensionale grafische voorstelling van de kern.

(d) (10 pt.) Bepaal de nucleolus van dit spel.